Предварителни бележки

1 Множества

1.1 Означения

Първо ще направим някои означения, които се използват при формулирането на математически твърдения.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ – „равно по определение”
$\Rightarrow$ – „следва”
$\Leftrightarrow$ – „тогава и само тогава, когато”
$:$ – „такова (такива), че”
$\forall$ – „за всяко (всеки)”
$\exists$ – „съществува”
$!$ – „единствен (само един)”

Символите $\forall$ и $\exists$ се наричат съответно **квантор за общност** и **квантор за съществуване**.

Следните твърдения са записани с помощта на горните символи:

$$a^2 \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot a$$
$$a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$$
$$a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$$
$$x^2 + x + 1 > 0 \ \forall x$$
$$\exists\ x :\ x^2 = 1$$
$$\exists !\, x :\ 2^x = 1$$

1.2 Множества. Основни понятия

Създател на теорията на множествата е Г. Кантор[1]. Теорията на множествата е оказала изключително плодотворно влияние на развитието на всички клонове на съвременната математика.

Понятията **множество**, **елемент** на множество и **принадлежност** на елемент на множество са първични понятия в математиката, т.е. те са понятия, на които не се дава определение. Понятията съвкупност, клас, фамилия се употребяват като синоними на понятието множество. Обектите, съставящи дадено множество, се наричат елементи или точки на това множество. Множеството ще считаме за определено, ако за всеки разглеждан обект можем

[1]Кàнтор (Cantor) Георг – (1845–1918) – герм. математик

да кажем дали принадлежи или не принадлежи на множеството. Обикновено множествата се означават с главни букви ($A, B, \dots, Z, \dots, \Omega$), а техните елементи с малки букви ($a, b, \dots z, \dots, \omega$).

Ако елементът a принадлежи на множеството A, ще пишем $a \in A$.

Ако елементът a не принадлежи на множеството A, ще пишем $a \notin A$.

Някои математически обекти може да се разглеждат като множества и като елементи на друго множество. Например правата е множество от точки, но също така и елемент на равнината.

В математическия анализ основно се използват следните множества:

$\mathbb{N}$ – множество на естествените числа,

$\mathbb{Z}$ – множество на целите числа,

$\mathbb{Q}$ – множество на рационалните числа,

$\mathbb{R}$ – множество на реалните числа,

$\mathbb{C}$ – множество на комплексните числа.

1.3 Задаване на множества

Най-често използваните начини за задаване на множества са следните:

а) чрез изброяване на елементите на множеството.

Например $A = \{a\}$ е множеството, състоящо се от един елемент a;

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ е множеството на арабските цифри;

$C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ е множеството от букви на латиницата.

Този начин за задаване се използва, ако множеството има краен брой елементи.

б) чрез характеризиране на елементите на множеството.

Нека $p(x)$ е някакво твърдение, описващо обединяващото свойство на елементите x на дадено множество A. Тогава множеството A задаваме чрез записа

$$A = \{x : \ p(x)\}$$

и четем „множеството A се състои от елементите x, които имат свойството $p(x)$". Например

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

е множеството от реални числа x, които удовлетворяват уравнението $x^2 - 3x + 2 = 0$, т.е. $A = \{1, 2\}$.

1.4 Отношения между множества

Определение 1.1. *Казваме, че множеството A е* ***подмножество*** *на множеството B (A се включва в B, A се съдържа в B, B съдържа A), ако всеки елемент на множеството A е елемент на множеството B, т.е. ако $x \in A \Rightarrow x \in B$.*

В този случай ще пишем $A \subset B$ (или $B \supset A$).

Пример 1.1. *Валидни са включванията:* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

В различни математически дисциплини се разглеждат множества, които са подмножества на някакво фиксирано множество Ω, което се нарича **универсално множество**. Така например в реалния анализ като универсално множество се използва множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа, в комплексния анализ – множеството $\mathbb{C}$ на комплексните числа, в теорията на вероятностите Ω е пространството от елементарни събития.

В следващите определения ще предполагаме, че всички разглеждани множества са подмножества на някакво универсално множество Ω, т.е. за всяко разглеждано множество A имаме $A \subset \Omega$.

Удобно е да се въведе множество, което не съдържа никакви елементи. Това множество се нарича **празно** и се означава със символа $\varnothing$.

Предполага се, че $\varnothing \subset A$ за всяко множество A.

Определение 1.2. *Казваме, че множествата A и B са* ***равни*** *и пишем $A = B$, ако се състоят от едни и същи елементи.*

Оказва се, че $A = B$ тогава и само тогава, когато са изпълнени включванията

$$A \subset B, \quad B \subset A. \tag{1}$$

Много често две равни множества A, B са зададени по различни начини и тяхното равенство не е очевидно. Тогава, за да докажем, че $A = B$ трябва да докажем, че са изпълнени включванията (1). Така например в елементарната геометрия по такъв начин се доказва, че ъглополовящата на даден ъгъл съвпада с множеството от точки в равнината, които са равноотдалечени от раменете на този ъгъл.

Ще отбележим, че записът

$$\{x \in \Omega : \ p(x)\}$$

определя различни множества в зависимост от това какво е избраното универсално множество Ω, съдържащо x. Така например множеството от корените на уравнението $x^2+1 = 0$ е различно при различен избор на универсалното множество Ω. По-конкретно, ако $\Omega = \mathbb{R}$ ще имаме, че

$$\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 1 = 0\} = \varnothing,$$

а ако $\Omega = \mathbb{C}$, то

$$\{x \in \mathbb{C} : \ x^2 + 1 = 0\} = \{i, -i\}.$$

1.5 Действия с множества

Нека A, B, C са подмножества на някакво универсално множество Ω.

Определение 1.3. *Казваме, че множеството $A \cup B$ е* ***обединение*** *на множествата A и B, ако всеки негов елемент принадлежи на поне едно от множествата A, B, т.е.*

$$A \cup B = \{x \in \Omega : \ x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пример 1.2. *Ако $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$, то $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.*

Определение 1.4. *Казваме, че множеството* $A \cap B$ *е* ***сечение*** *на множествата* A *и* B*, ако всеки негов елемент принадлежи и на двете множества* A, B*, т.е.*

$$A \cap B = \{x \in \Omega : \ x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пример 1.3. *Ако* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$, *то* $A \cap B = \{2\}$.

Определение 1.5. *Казваме, че множествата* A *и* B *са* ***непресичащи се****, ако нямат общи елементи, т.е., ако* $A \cap B = \varnothing$.

Определение 1.6. *Казваме, че множеството* $\overline{A}$ *е* ***допълнение*** *на множеството* A *(до универсалното множество* Ω*), ако се състои от всички елементи на* Ω*, които не принадлежат на* A*, т.е.*

$$\overline{A} = \{x \in \Omega : \ x \notin A\}.$$

Пример 1.4. *Ако* $\Omega = \mathbb{R}$ *и* $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$, *то* $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\}$.

Имаме, че $A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad \overline{\overline{A}} = A.$

Определение 1.7. *Казваме, че множеството* $A \backslash B$ *е* ***разлика*** *на множествата* A *и* B*, ако всеки негов елемент принадлежи на* A *и не принадлежи на* B*, т.е.*

$$A \setminus B = \{x \in \Omega : \ x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

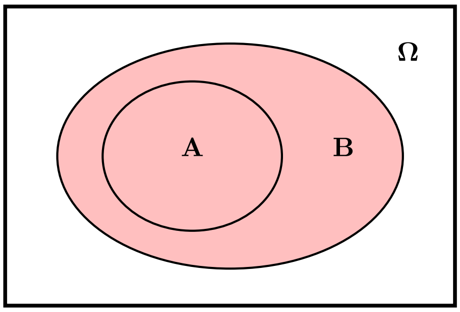
Пример 1.5. *Ако* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$, *то* $A \setminus B = \{1, 3\}$.

Имаме, че $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

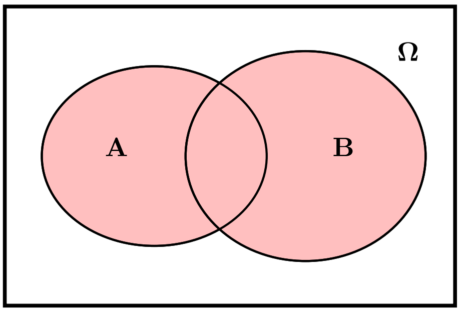
Ще отбележим следните правила за действия с множества:

1. $A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$
5. $A \cup \Omega = \Omega, \qquad A \cap \Omega = A;$
6. $A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing;$
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

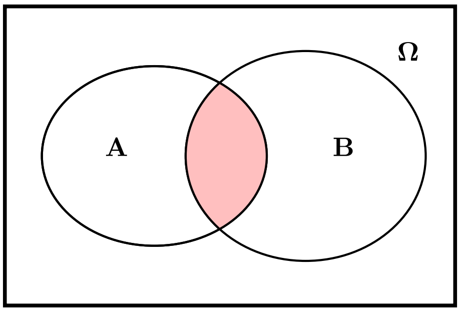
Определенията 1.1 – 1.7 са илюстрирани с диаграмите на Вен–Ойлер на Фиг. 1.



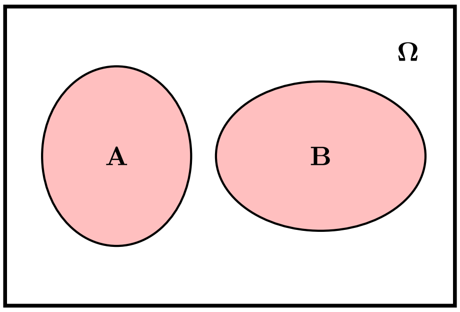
$A \subset B$



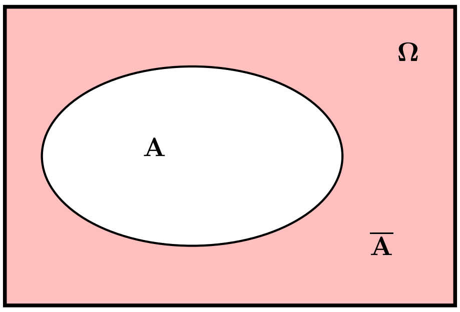
$A \cup B$



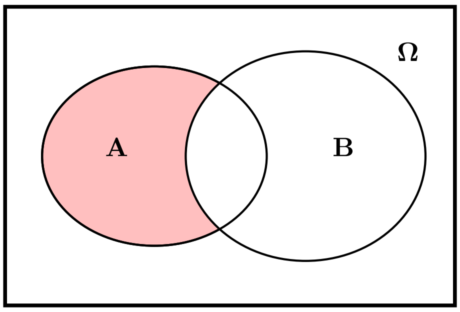
$A \cap B$



$A \cap B = \varnothing$



$A \cup \overline{A} = \Omega,\ A \cap \overline{A} = \varnothing$



$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Фигура 1: Диаграми на Вен–Ойлер

2 Числени множества

Математиката започва своето изграждане като наука върху абстрактното понятие „число”. В този раздел ще проследим накратко развитието на понятието „число” и ще изложим най-важните сведения от теорията на реалните числа.

2.1 Реални числа

Исторически, в резултат на броенето, първо са възникнали така наречените **естествени (натурални) числа**, които образуват множеството

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

В множеството $\mathbb{N}$ може да се определят аритметичните действия **събиране** и **умножение**. При тези действия на всеки две естествени числа a, b се съпоставя тяхната сума $a + b$ и произведение $a \cdot b$, които също са естествени числа.

За да са възможни четирите аритметични действия за всяка двойка числа (освен, разбира се, делението на нула, на което не може да се предпише разумен смисъл), се налага да се разшири множеството от естествени числа. Такова разширение се налага също така и от нуждата от измерване на някои геометрични или физични величини.

С въвеждането на числото 0 (нула) и на целите отрицателни числа действието изваждане вече става възможно в множеството на **целите числа**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Следващото обобщение на понятието число става с въвеждането на множеството на **рационалните числа**

$$\mathbb{Q} = \{r = \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\},$$

в което са възможни действията събиране, умножение, изваждане и деление.

Ще отбележим, че ако $r \in \mathbb{Q}$, то r е крайна десетична дроб или безкрайна периодична дроб.

Пример 2.1. $\dfrac{3}{4} = 0{,}75, \quad \dfrac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}(6).$

Обратно, всяка десетична дроб, която е крайна или безкрайна периодична, може да се представи като рационална дроб, т.е. представлява рационално число.

Пример 2.2. $0{,}125 = \dfrac{125}{1000} = \dfrac{1}{8},$

$$0{,}(23) = 0{,}232323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \cdots = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{99}\,.$$

<u>Геометрично тълкуване</u>: Всички отсечки, които са съизмерими с единичната отсечка, имат дължина – рационално число. Дължините на отсечките, които не са съизмерими с единичната отсечка, не се изразяват с рационални числа.

Пример 2.3. *Дължината на хипотенузата на правоъгълен триъгълник с катети с дължини* 1 *е равна на* $r = \sqrt{2}$ *и не е рационално число.*

Така се стига до въвеждането на **ирационалните** числа, които се изразяват с безкрайни непериодични дроби.

Пример 2.4. *Отношението на дължината на обиколката на окръжността към дължината на нейния диаметър е ирационалното число* $\pi = 3{,}141592\ldots$.

Всички рационални и ирационални числа образуват множеството на **реалните числа**

$$\mathbb{R} = \{\text{рационални}\} \cup \{\text{ирационални}\}.$$

За елементите на това множество се въвеждат аритметичните действия (операции) събиране, умножение, изваждане и деление. Въвежда се и отношението сравнение по големина (наредба) по следния начин:

• За всяко число $a \in \mathbb{R}$ е определена точно една от релациите

$a > 0$ (a е по-голямо от нула),

$a < 0$ (a е по-малко от нула),

$a = 0$ (a е равно на нула),

при което е в сила следното свойство:

Ако $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b > 0$ и $ab > 0$.

• За всеки две числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ ще казваме, че a е по-голямо от b, ако $a - b > 0$. В този случай ще пишем $a > b$. В случая, когато $a > b$ или $a = b$, ще пишем $a \geq b$ и ще казваме, че a е по-голямо или равно на b.

Аналогично се определят релациите $a < b$ и $a \leq b$.

В сила са следните свойства на числените неравенства:

1. За всеки две реални числа a и b е в сила точно една от релациите $a > b$, $a < b$ или $a = b$;

2. Ако $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

3. Ако $a > b$ и $c \in \mathbb{R}$, то $a + c > b + c$;

4. Ако $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;

5. Ако $a > b$, то $-a < -b$;

6. Ако $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;

7. Ако $a \geq b$ и $b \geq a$, то $a = b$.

2.2 Представяне на реалните числа

За извършване на аритметични действия с числа е необходимо последните да бъдат предварително представени в някаква бройна система.

В практиката се е утвърдила десетичната бройна система, в която числата се представят като поредица от десетте арабски[2] цифри, образуващи множеството

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Ще отбележим, че изчисленията в компютрите се извършват с използване на двоичната бройна система, в която числата се представят като поредица от нули и единици.

Да обсъдим въпроса за представянето на числата в десетична бройна система.

Всяко $x \in \mathbb{R}$ се представя по единствен начин във вида

$$x = n + f,$$

където $n = [x]$, $n \in \mathbb{N}$ се нарича **цяла част на** x; $f \in \mathbb{R}$ и $0 \leq f < 1$ и се нарича **дробна част на** x.

Пример 2.5. $2{,}6 = 2 + 0{,}6 \quad (n = 2,\ f = 0{,}6)$;
$-7{,}1 = -8 + 0{,}9 \quad (n = -8,\ f = 0{,}8)$.

В десетична бройна система всяко естествено число n се записва по единствен начин като крайна поредица от арабски цифри

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0 \stackrel{\text{def}}{=} a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0, \quad (2)$$

където $a_k \neq 0$.

Пример 2.6. $5602 = 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

Всяко отрицателно цяло число m е противоположно на някое естествено число n. Тогава $m = -n$ и записваме

$$m = -a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0,$$

ако за n е валидно представянето (2).

Всяко реално число f, за което $0 \leq f < 1$, може да се представи по единствен начин като десетична дроб, т.е. като поредица от арабски цифри от вида

$$f = 0{,}a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k} \dots \stackrel{\text{def}}{=} a_{-1} \cdot 10^{-1} a_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots + a_{-k} 10^{-k} + \cdots, \quad (3)$$

където $a_{-k} \in S$ и не съществува $k_0 \in \mathbb{N}$ такова, че

$$a_{-k} = 9 \text{ при всяко } k \geq k_0. \quad (4)$$

Пример 2.7. $0{,}473 = 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$.

---

[2]Тези цифри са „индийски” и са достигнали от Индия до Европа чрез арабите.

Забележка 2.1. *Условието* (4) *се налага, за да се осигури единственост на представянето* (3). *В противен случай, ако допуснем представяне, в което след някое a_{-k_0} всички цифри са 9, то някои числа допускат две различни представяния от вида* (3). *Например* $\dfrac{1}{2}$ *има представянето* $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$ *и представянето*

$$0{,}4(9) = 0{,}4999\ldots = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots = \frac{4}{10} + \frac{\frac{9}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}\cdot$$

Практически човекът и компютърът могат да извършват само краен брой операции с краен брой естествени числа. Затова при оперирането с реални числа, чиято дробна част е безкрайна десетична дроб се използва приближено представяне на тези числа. Това се осъществява, като дробната част на разглежданото число се замени с крайна десетична дроб по следния начин: Ако десетичната дроб f има вида

$$f = 0{,}b_1 b_2 \ldots b_n \ldots,$$

то f можем да представим приближено във вида

$$f \approx \widetilde{f} = 0{,}b_1 b_2 \ldots b_n + c \cdot 10^{-n},$$

където $c = 0$ (представяне с недостиг) или $c = 1$ (представяне с излишък).

При това представяне имаме n верни знака (цифри) след десетичната запетая и грешката от замяната на f с приближената стойност $\widetilde{f}$ не превишава 10^{-n}.

Пример 2.8. *Числото* $\pi = 3{,}141592\ldots$ *се представя с недостиг от числата*

3,1, 3,14, 3,141, 3,1415, 3,14159, 3,141592 *и т.н.,*

а с излишък – от числата

3,2, 3,15, 3,142, 3,1416, 3,14160, 3,141593 *и т.н.*

където грешката от такова представяне не превишава съответно

0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001, 0,000001 *и т.н.*

2.3 Абсолютна стойност

Определение 2.1. ***Абсолютна стойност*** *на числото* $a \in \mathbb{R}$ *се нарича числото*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0, \\ -a, & \text{ако } a < 0. \end{cases}$$

Пример 2.9. $|5| = 5, \quad |0| = 0, \quad |-3| = 3.$

Ще напомним,че $\sqrt{a^2} = |a|$ за всяко $a \in \mathbb{R}$.

Затова при извличане на квадратен корен от точен квадрат на числен израз, чиято конкретна стойност не ни е известна, се използва абсолютната стойност на числения израз.

Пример 2.10. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|, \quad \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|.$

2.4 Интервали

Общоприето е при онагледяването на теоретичните разглеждания с реални числа да се използва изобразяването на множеството $\mathbb{R}$ чрез множеството от точки на една права (реална права, координатна ос, координатна права). Това се осъществява, като на всяко $a \in \mathbb{R}$ съпоставим точка A от правата, която има координата a (по-подробно, вж. глава 3. Вектори). Затова множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа често се нарича реална права, а отделните реални числа – точки от реалната права. Като имаме предвид такова изобразяване на реалните числа, понякога вместо да казваме, че „a е по-малко от b" ще казваме, че „точката a е наляво от точката b" или „точката b е надясно от точката a".

Нека разгледаме някои от най-често използваните множества от реални числа и тяхното геометрично представяне.

а) Използват се следните крайни интервали:

• **отворен интервал** с краища a, b

$(a,b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$;

• **затворен интервал** с краища a, b

$[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x \le b\}$;

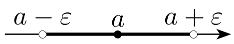
• **полуотворен (полузатворен) интервал** с краища a, b

$[a,b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x < b\}$;

$(a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \le b\}$;

• $\varepsilon-$**околност на точката** a

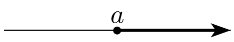
$U_\varepsilon(a) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$.



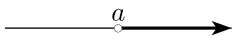
Символите $+\infty$ (плюс безкрайност) и $-\infty$ (минус безкрайност) се наричат **безкрайни точки**. Счита се, че всяка точка от реалната права е по-надясно от $-\infty$ и по-наляво от $+\infty$, т.е. за всяко $a \in \mathbb{R}$ имаме $-\infty < a < +\infty$.

а) Използват се следните безкрайни интервали:

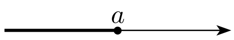
$[a,+\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ x \ge a\}$;



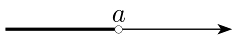
$(a,+\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ x > a\}$;



$(-\infty,a] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ x \le a\}$;



$(-\infty,a) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} :\ x < a\}$.



Множеството $\mathbb{R}$ се означава често като интервала $(-\infty,+\infty)$.

2.5 Градуси и радиани

Градус е единица за измерване на равнинен (плосък) ъгъл, представляващ 1/360 от пълния кръг (оборот). Означава се с °. Така например правият ъгъл е равен на 90°, изправеният ъгъл е равен на 180°, а ъглите на равностранния триъгълник са равни на 60°. Градусът е единица, която е извън международната система на единиците (SI), но поради голямото ѝ практическо значение (в геометрията, астрономията, картографията и др.) се допуска тя да се използва наред с радиана – единицата за ъгъл в SI.

Радиан е единица за измерване на равнинни ъгли. Международното означение е **rad**. Един радиан (1 rad) има ъгълът между два радиуса на кръг, които отсичат от окръжността му дъга с дължина, равна на дължината на радиуса на кръга. Тъй като радианът е безразмерна величина (отношение на две дължини), често означението на единицата rad не се изписва.

От съотношението

$$\frac{\alpha[\text{rad}]}{\alpha[^\circ]} = \frac{\pi}{180^\circ} \tag{5}$$

следват формулите за преминаване на мярката на един ъгъл от градуси към радиани и обратно

$$\alpha[\text{rad}] = \alpha[^\circ] \cdot \frac{\pi}{180^\circ}, \quad \alpha[^\circ] = \alpha[\text{rad}] \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \tag{6}$$

Тук $\alpha[^\circ]$ е ъгълът, измерен в градуси, $\alpha[\text{rad}]$ е ъгълът, измерен в радиани.

Пример 2.11. *Ако ъгълът α, измерен в градуси, е равен на 15°, то същият ъгъл, измерен в радиани, е равен*

$$\alpha[\text{rad}] = 15^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{12} \cdot$$

При разглеждане на тригонометричните функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$ в математическия анализ, физиката, теоретичната радиотехника и др. винаги се счита, че независимата променлива x се измерва в радиани. Тогава формулите, в които участват тригонометрични функции, изглеждат много по-просто от същите формули, в които обаче x се измерва в градуси. Примери за това са следните формули:

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (\sin x)' = \cos x.$$

В долната таблица са дадени стойностите на често срещани ъгли в градуси и радиани и стойностите на основните тригонометрични функции при тези ъгли.

Таблица 1

x, °	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	270°	360°
x, rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	0	–	0
cotg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	–	0	–