1 Детерминанти и системи

1. Матрици

Таблицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

съдържаща mn числа a_{ij}, се нарича **матрица** с m реда и n **стълба** (или **колони**). Казваме също, че A е $(m \times n)$–матрица с елементи a_{ij}. Тук първият индекс i показва реда, а вторият j –стълба, в който се намира елементът a_{ij}.

Означения: $\left(\quad \right) \left[\quad \right] \left\| \quad \right\|$

При $m \neq n$ матрицата е **правоъгълна**, а при $m = n$ – **квадратна**. Квадратна матрица с размери $n \times n$ се нарича **матрица от n–ти ред**.

Ако A е матрица от n–ти ред, то неин **главен диагонал** образуват елементите $a_{ii},\ i = 1, \dots, n$, а **второстепенен диагонал** – елементите $a_{i,n+1-i},\ i = 1, \dots, n$.

Съществуват различни видове матрици в зависимост от наличието на нули или единици в зададени позиции. Така например матрицата се нарича:

• **нулева**, ако всичките ѝ елементи са равни на нула. Означава се с 0 или $0_{m \times n}$, например

$$0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• **диагонална**, ако е квадратна и $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

$$diag(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

• **единична**, ако е диагонална с диагонални елементи, равни на 1. Означава се с I или I_n, например

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Важна числена характеристика на една квадратна матрица е нейната **детерминанта**.

2. Детерминанта от втори ред

Нека е дадена матрицата от втори ред

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение 1. *Числото*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

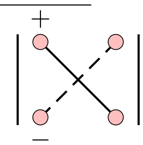
се нарича ***детерминанта от втори ред*** *(**детерминанта на матрицата** A).*

Числата $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ се наричат **елементи** на детерминантата.

Детерминантата D е число, което се получава от елементите на детерминантата по формула (1). За да се изтъкне, че тази детерминанта се получава от елементите на матрицата A, понякога тя се означава с $|A|$ или $\det A$.

Детерминантата има **редове, стълбове** и **диагонали**, които се определят както при матриците.

Правило:



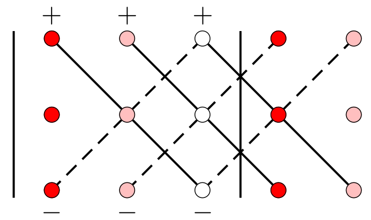
Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = 11.$$

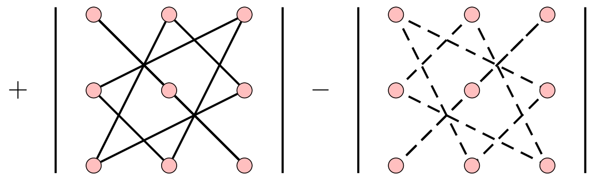
3. Детерминанта от трети ред

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{2}$$

Правило на Сàрус:



Правило на триъгълниците:



Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 \\ &\ -3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 15 + 24 + 24 - 27 - 20 - 16 = 63 - 63 = 0. \end{aligned}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right.$$

$$= 15 + 24 + 24 - 27 - 16 - 20 = 0.$$

4. Теорема за разложението

Дадените по-долу определения са за детерминанти от трети ред, но са в сила и за детерминанти от произволен ред.

Определение 2. ***Минор*** *на елемента a_{ij} на дадена детерминанта се нарича детерминантата Δ_{ij} от по-нисък ред, която се получава от дадената детерминанта чрез зачеркване на $i-$я ред и $j-$я стълб, съдържащи елемента a_{ij}.*

Пример: За детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

Определение 3. ***Адюнгирано количество*** *на елемента a_{ij} на дадена детерминанта се нарича числото*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Следователно адюнгираното количество A_{ij} на елемента a_{ij} е равно на минора Δ_{ij}, взет със знак $(+)$ или $(-)$ в зависимост от положението на елемента a_{ij}.

Пример: За детерминантата от горния пример

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 5 = -5.$$

Правило за знаците:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Теорема 1 (Теорема за разложението)**.** *Детерминантата е равна на сумата от произведенията на всички елементи на произволен неин ред (стълб) със съответните им адюнгирани количества.*

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \\ D &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \\ D &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, \\ \\ D &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \\ D &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \\ D &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \end{aligned} \tag{3}$$

Пример: Разложение по първия ред:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = 8.$$

Пример: Разложение по втория стълб:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (-4) + (-8) - 2 \cdot (-4) = 8.$$

5. Свойства на детерминантите

Всички свойства, които са формулирани по-долу за редовете, са в сила и за стълбовете!

Свойство 1. Детерминантата не се променя, ако заменим редовете ѝ със съответните стълбове.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. Детерминантата сменя знака си, ако разменим местата на два реда.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

Следствие 1. Детерминанта с два еднакви реда е равна на нула.

Следствие 2. Сумата от произведенията на елементите на един ред със съответните адюнгирани количества на елементите на друг ред е равна на нула. Например

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

За редовете има още 5 подобни равенства. Напишете ги!

Свойство 3. Общ множител на елементите на даден ред може да се изнася пред знака на детерминантата.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(2-3) = -4.$$

Следствие 1. Ако един ред е нулев, то детерминантата е равна на нула.

Следствие 2. Ако един ред е пропорционален на друг ред, то детерминантата е равна на нула.

Свойство 4. Детерминантата не се променя, ако към елементите на един ред добавим елементите на друг ред, умножени с число, различно от нула.

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} =$$

Тук към елементите на втория и третия ред са добавени елементите на първия ред, умножени съответно с -2 и -3.

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8.$$

Свойство 5. Нека всеки елемент на $i-$тия ред на детерминантата D е сума на две събираеми: $a_{ij} = b_j + c_j$. Тогава детерминантата D е равна на сума на две детерминанти D_1 и D_2, в които всички редове освен $i-$тия са същите както в детерминантата D, като $i-$тия ред в детерминантата D_1 се състои от първите събираеми b_j, а в детерминантата D_2 – от вторите събираеми c_j. Свойството е в сила и за произволен $j-$ти стълб на детерминантата D.

Например за първия стълб на детерминанта от трети ред D имаме

$$D = \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 + c_2 & a_{22} & a_{22} \\ b_3 + c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{22} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{22} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_1 + D_2.$$

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 101 & 10 \\ 148 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100+1 & 10 \\ 150-2 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 100 & 10 \\ 150 & 15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -2 & 15 \end{vmatrix} = 0 + 35 = 35.$$

6. Детерминанта от $n-$ ти ред

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определението за детерминанта от $n-$ ти ред се дава по такъв начин, че да е в сила теоремата за разложението. Тогава всички свойства на детерминантите от втори и трети ред се запазват, а като прилагаме теоремата за разложението можем да сведем пресмятането на детерминанта от даден ред към пресмятането на детерминанта от по-нисък ред.

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

Тук към елементите на четвъртия ред сме прибавили елементите на третия ред, умножени с -2. След като разложим получената детерминанта по елементите на третия стълб, получаваме за пресмятане само една детерминанта от трети ред, която преобразуваме, като към елементите на първия ред добавим елементите на втория ред, умножени с -2. Накрая разлагаме получената детерминанта по елементите на втория стълб:

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 3(5-8) = -9.$$

7. Приложение на детерминантите за решаване на системи от алгебрични уравнения

Нека е дадена системата от две алгебрични уравнения с две неизвестни

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{array} \right. \tag{4}$$

Тази система напълно се определя от следната **разширена матрица на системата**

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right),$$

състояща се от **матрицата на системата**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

съдържаща коефициентите a_{ij} пред неизвестните (в лявата част) и матрицата – стълб

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

от **свободните членове** b_1, b_2 (в дясната част).

Нека **детерминантата на системата** е различна от нула:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

При това условие система (4) има единствено решение

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{D}, \quad y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{D} \cdot \tag{6}$$

Понеже числителите в (6) съвпадат с детерминантите

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

то можем да запишем

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \cdot \tag{7}$$

Формулите (7) се наричат **формули на Крамер** за системи от две уравнения с две неизвестни.

Пример: Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 8 \\ 4x + 5y = -6. \end{array} \right.$$

Пресмятаме детерминантите

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 22, \; D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -44$$

и прилагаме формулите на Крамер:

$$x = \frac{22}{22} = 1, \quad y = \frac{-44}{22} = -2.$$

Системата от три уравнения с три неизвестни

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array} \right. \tag{8}$$

има разширена матрица

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

За да се реши система (8) първо се пресмятат детерминантите

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ако $D \neq 0$, то решението на (8) се получава, като се приложат следните **формули на Крамер** за система от три уравнения с три неизвестни:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D} \cdot \tag{9}$$

Пример: Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 7. \end{array} \right.$$

Пресмятаме детерминантите

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=-18,\ D_x=\begin{vmatrix}7&2&3\\4&3&1\\7&1&2\end{vmatrix}=-18,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&7&3\\2&4&1\\3&7&2\end{vmatrix}=0,\ D_z=\begin{vmatrix}1&2&7\\2&3&4\\3&1&7\end{vmatrix}=-36$$

и прилагаме формулите на Крамер:

$$x=\frac{-18}{-18}=1,\ y=\frac{0}{-18}=0,\ z=\frac{-36}{-18}=2.$$

Повторете подробно горните пресмятания!!!

8. Метод на Гàус

За системи от n ($n>3$) уравнения с n неизвестни са в сила формули на Крамер с аналогична структура на формулите от (7) и (9). Ще отбележим, че тези формули имат ограничено приложение поради следните причини:

– прилагат се само за системи с равен брой на неизвестните и уравненията;

– за такива системи формулите се прилагат само, ако детерминантата на системата е различна от нула: $D\neq 0$;

– ако формулите са приложими, при големи n ($n>3$) се налага да се пресмятат голям брой детерминанти от висок ред;

– методът не дава отговор на въпроси за разрешимостта на системата и броя на нейните решения.

Тези ограничения може да се избегнат, ако системите от алгебрични уравнения се решават с, така наречения, **метод на Гаус**, който в сравнение с метода на Крамер има следните предимства:

– отпада ограничението за равен брой на неизвестните и уравненията и ограничението $D\neq 0$;

– дава отговор на въпросите за разрешимостта на системата и броя на нейните решения;

– не се пресмятат детерминанти, а се правят само елементарни преобразования на редовете на разширената матрица на системата.

Прилагането на метода на Гаус се извършва в следния ред:

1. Записва се разширената матрица на системата;

2. Разширената матрица се преобразува в матрица, в която елементите под главния диагонал са равни на нула, като за целта се прилагат следните елементарни преобразования на редовете:

– умножение на елементите на даден ред с число, различно от нула;

– добавяне на елементите на даден ред към съответните елементи на друг ред;

Забележка: Тези преобразования на редовете съответстват на умножение на дадено уравнение на системата с число, различно от нула и на почленно събиране на две уравнения на системата, при което се получава нова система, еквивалентна на дадената (Еквивалентните системи имат едни и същи решения!).

3. След приключване на процедурата по горната точка, по новополучената разширена матрица се записва съответната система от уравнения;

4. Решаваме получената система „отдолу – нагоре”.

Пример: Да се реши системата:

$$\left|\begin{aligned} x+2y+3z&=7\\ 2x+3y+\ z&=4\\ 3x+\ y+2z&=7.\end{aligned}\right.$$

1. Разширената матрица на системата има вида

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&7\\2&3&1&4\\3&1&2&7\end{array}\right)$$

2. Получаваме нули в първия стълб под главния диагонал, като първия ред, умножен с -2, добавим към втория ред и първия ред, умножен с -3, добавим към третия ред:

$$(A|b)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&7\\0&-1&-5&-10\\0&-5&-7&-14\end{array}\right)$$

Получаваме нула във втория стълб под главния диагонал, като втория ред, умножен с 5, добавим към третия ред, след което в получената разширена матрица умножавим втория и третия ред с -1:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&7\\0&-1&-5&-10\\0&0&-18&-36\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&7\\0&1&5&10\\0&0&18&36\end{array}\right)$$

3. На получената разширена матрица съответства системата

$$\left|\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & 3z = & 7 \\ & y+ & 5z = & 10 \\ & & 18z = & 36. \end{array}\right.$$

4. Решаваме тази система „отдолу – нагоре”:
От последното уравнение следва, че
$z = \dfrac{36}{18} = 2$;

Заместваме $z = 2$ във второто уравнение и получаваме $y + 5 \cdot 2 = 10$, откъдето следва, че $y = 0$;
Заместваме $y = 0$ и $z = 2$ в първото уравнение и получаваме $x + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7$, откъдето следва, че $x = 1$.

Следователно решението на системата е

$$x = 1,\ y = 0,\ z = 2.$$