4 Уравнения на права

1. Общо уравнение на права в равнината

Общото уравнение на права q в равнината Oxy има вида

$$q \equiv ax + by + c = 0 \quad (|a| + |b| \neq 0) \qquad (1)$$

Частни случаи:

а) $c = 0 \quad \Rightarrow (0,0) \in q$;

б) $a = 0 \quad \Rightarrow y = -\dfrac{c}{b} \Rightarrow q \parallel Ox$;

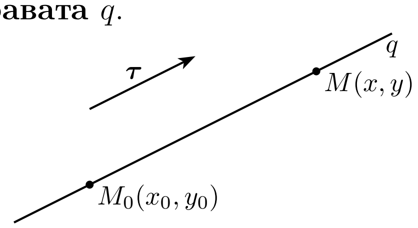
в) $b = 0 \quad \Rightarrow x = -\dfrac{c}{a} \Rightarrow q \parallel Oy$;

г) $a = 0,\ c = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \Rightarrow q \equiv Ox$;

д) $b = 0,\ c = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \Rightarrow q \equiv Oy$.

2. Уравнение на права по дадена точка и направляващ вектор

Дадени са: точка $M_0(x_0, y_0) \in q$ и вектор
$\boldsymbol{\tau} = (\alpha, \beta) \parallel q$,
който се нарича **направляващ вектор за правата** q.



Нека $M(x,y) \in q$. Тогава векторът $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ е колинеарен с вектора $\boldsymbol{\tau} = (\alpha, \beta)$ и от условието за колинеарност следва, че

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}\,. \qquad (2)$$

(**канонично уравнение на права**)

Пример: Нека $M_0(1, -2) \in q$ и $\boldsymbol{\tau} = (-3, 4) \parallel q$. Тогава от (2) следва, че

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - (-2)}{4},$$

откъдето $q \equiv 4x + 3y + 2 = 0$.

Като приравним двете дроби в (2) на t

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = t \in (-\infty, +\infty)$$

и изразим x и y, получаваме

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{array} \right. \quad -\infty < t < +\infty. \qquad (3)$$

(**параметрично уравнение на права**)

3. Уравнение на права, минаваща през две дадени точки

Дадени са: $M_1(x_1, y_1) \in q$ и $M_2(x_2, y_2) \in q$.

Векторът $\boldsymbol{\tau} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ е направляващ за правата q и затова

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,. \qquad (4)$$

(**уравнение на права през две точки**)
Коментар: За структурата на уравнение (4).

Пример: Дадени са точките $M_1(5, 2)$, $M_2(4, 0)$.

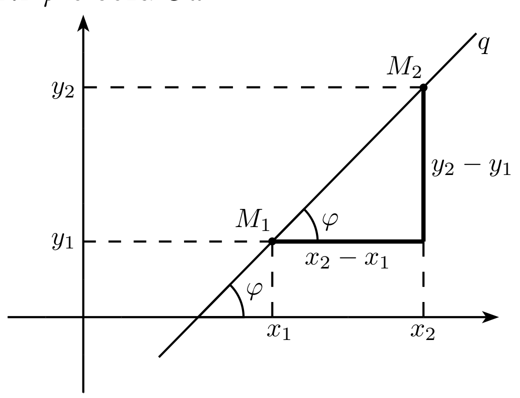
Уравнението на правата q, минаваща през точките M_1 и M_2, може да се напише по два начина:

$$\frac{x - 5}{4 - 5} = \frac{y - 2}{0 - 2}, \qquad \frac{x - 4}{5 - 4} = \frac{y - 0}{2 - 0}$$

И от двете уравнения следва, че уравнението на правата е $q \equiv 2x - y - 8 = 0$.

4. Уравнение на права по дадени точка и ъглов коефициент

Дадени са: точка $M_1(x_1, y_1) \in q$ и $k = \operatorname{tg}\varphi$ – **ъглов коефициент** на правата q, сключваща ъгъл φ с оста Ox.



Записваме уравнение (4) във вида

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

и като отчетем, че

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

получаваме **уравнението на права по дадени точка и ъглов коефициент**.

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (5)$$

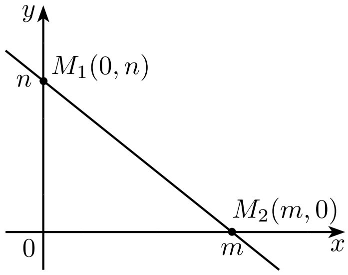
Пример: Да се намери уравнението на права, минаваща през точката $(-2, 3)$ и сключваща с оста Ox ъгъл $\varphi = 135°$. Понеже $\operatorname{tg}\varphi = -1$, то съгласно (5) уравнението е

$$y - 3 = (-1)(x - (-2)),$$

т.е. $q \equiv x + y - 1 = 0$.

5. Отрезово уравнение на права

Дадени са: **отрезите** m и n, които правата отсича от осите Ox и Oy (Фиг.).



По дадените отрези се определят две точки от правата: $M_1(0, n)$ и $M_2(m, 0)$. От уравнението на права през две точки (4) следва, че

$$\frac{x - 0}{m - 0} = \frac{y - n}{0 - n}$$

или

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \qquad (6)$$

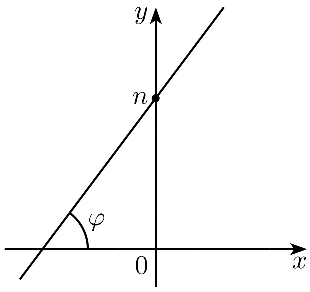
(**отрезово уравнение на права**)

Пример: Ако отрезите са $m = -3$ и $n = 2$, то правата има уравнение

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow q \equiv 2x - 3y + 6 = 0.$$

6. Декартово уравнение на права

Дадени са: отрез n от оста Ox и $k = \operatorname{tg}\varphi$ – ъгловият коефициент на правата q, сключваща ъгъл φ с оста Ox.



Отрезът n определя точката $N(0, n)$ от правата. От уравнение (5) следва, че

$$y - n = k(x - 0)$$

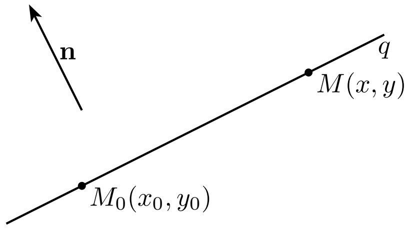
или

$$y = kx + n. \qquad (7)$$

(**Декартово уравнение на права**)

7. Уравнение на права по дадена точка и нормален вектор

Дадени са: точка $M_0(x_0, y_0) \in q$ и ненулев вектор $\mathbf{n} = (a, b) \perp q$, който се нарича **нормален вектор за правата** q.



Нека $M(x, y) \in q$. Тогава векторът

$$\mathbf{p} = \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0) \perp \mathbf{n} = (a, b)$$

и скаларното произведение между тези вектори е равно на нула: $\mathbf{np} = 0$. Затова уравнението на правата q е

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (8)$$

Коментар: За структурата на формулата.

Пример: Уравнението на правата q, минаваща през точка $M(2, -1)$ и перпендикулярна на вектора $\mathbf{n} = (3, -4)$, е

$$3(x - 2) + (-4)(y - (-1)) = 0$$

или

$$q \equiv 3x - 4y - 10 = 0.$$

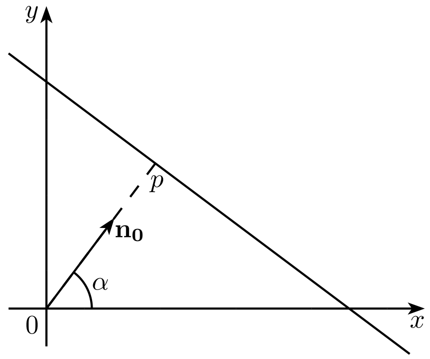
Забележка: Ако $q \equiv ax + by + c = 0$, то

$\mathbf{n} = (a, b)$ – нормален вектор за q;

$\boldsymbol{\tau} = (b, -a)$ – направляващ вектор за q.

8. Нормално уравнение на права

Дадени са: $\mathbf{n_0} = (a_0, b_0)$ – **единичен нормален вектор** за правата q; p – разстояние от точка O до правата q.



Тогава q има уравнение

$$q \equiv a_0x + b_0y - p = 0. \qquad (9)$$

(**нормално уравнение на права**)

Ако векторът $\mathbf{n_0}$ сключва ъгъл α с оста Ox, то $\mathbf{n_0} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ и тогава уравнение (9) приема вида

$$q \equiv \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - p = 0. \qquad (10)$$

Нека $q \equiv ax + by + c = 0$.

Тогава нормалното уравнение на правата q има вида

$$q \equiv \pm\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0, \qquad (11)$$

където знакът е $(+)$, ако $c < 0$; $(-)$, ако $c > 0$.

Пример: $q \equiv -3x + 4y + 10 = 0$. Понеже $c = 10 > 0$, то нормалното уравнение на правата q е

$$-\frac{-3x + 4y + 10}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = 0,$$

$$\frac{3x - 4y - 10}{5} = 0,$$

$$q \equiv \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

и

$$p = 2,\ \mathbf{n_0} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}).$$

9. Разстояние от точка до права

За да се намери разстоянието d от дадена точка $M(x_0, y_0)$ до правата $q \equiv ax + by + c = 0$, се извършва следното:

Пресмята се **ориентираното разстояние**

$$\delta = \pm\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

където знакът е $(+)$, ако $c < 0$; $(-)$, ако $c > 0$. Тогава

$$d = |\delta| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Освен това:

– ако $\delta > 0$, то точките O и M са от различни страни на q;

– ако $\delta < 0$, то точките O и M са от едната страна на q.

Пример: Да се намери разстоянието от точка $M(2, -1)$ до правата $q \equiv 2x - y + 3 = 0$. Понеже $c = 3 > 0$, то

$$\delta = -\frac{2 \cdot 2 - (-1) + 3}{\sqrt{4 + 1}} = -\frac{8}{\sqrt{5}}$$

и $d = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$. Понеже $\delta < 0$, то точките O и M са от едната страна на правата q.

10. Ъглополовящи

Нека две пресичащи се прави q_1 и q_2 са зададени с нормалните си уравнения:

$$q_1 \equiv a_1x + b_1y - p_1 = 0,$$

$$q_2 \equiv a_2x + b_2y - p_2 = 0.$$

Тогава уравненията на ъглополовящите l_1 и l_2 на ъглите между тези прави са

$$l_1 \equiv a_1x + b_1y - p_1 = a_2x + b_2y - p_2,$$

$$l_2 \equiv a_1x + b_1y - p_1 = -(a_2x + b_2y - p_2).$$

Пример: Да се намерят ъглополовящите l_1 и l_2 на ъглите между правите $q_1 \equiv x + y - 4 = 0$ и $q_2 \equiv 2x - y + 3 = 0$. Намираме нормалните уравнение на правите:

$$q_1 \equiv \frac{x + y - 4}{\sqrt{2}}, \quad q_2 \equiv \frac{-2x + y - 3}{\sqrt{5}}$$

Тогава

$$l_1 \equiv \frac{x + y - 4}{\sqrt{2}} = \frac{-2x + y - 3}{\sqrt{5}},$$

$$l_2 \equiv \frac{x + y - 4}{\sqrt{2}} = \frac{2x - y + 3}{\sqrt{5}}.$$

11. Взаимно положение на прави

За взаимното положение на правите

$$\left| \begin{array}{l} q_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ q_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array} \right. \tag{12}$$

има следните възможности:
а) <u>пресичат се</u> $(q_1 \times q_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \cdot \tag{13}$$

Координатите на пресечната точка на правите се получават, като се намери единственото решение на система (12)$(\Delta = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0!)$.
б) <u>успоредни са</u> $(q_1 \parallel q_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \cdot \tag{14}$$

в) <u>съвпадат</u> $(q_1 \equiv q_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \tag{15}$$

<u>Пример</u>: За правите
$p \equiv 2x - y + 3 = 0, \quad q \equiv 4x - 2y + 7 = 0,$
$r \equiv 4x - 2y + 6 = 0, \quad s \equiv x + y - 6 = 0.$
имаме, че $p \equiv r,\ p \parallel q,\ p \times s$. Пресечната точка M на правите p и s се получава, като се реши системата

$$\left| \begin{array}{r} 2x - y + 3 = 0, \\ x + y - 6 = 0 \end{array} \right.$$

Решението е $x = 1, y = 5$, т.е. пресечната точка е $M(1, 5)$.

12. Ъгъл между две прави

Нека с φ е означен ъгълът между правите q_1 и q_2 ($\varphi = 0$, ако правите са успоредни или съвпадат). Използват се следните начини за определяне на φ:
а) при известни нормални вектори $\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}$ на правите q_1, q_2. Тогава

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n_1}\mathbf{n_2}}{|\mathbf{n_1}||\mathbf{n_2}|} \cdot \tag{16}$$

б) при известни направляващи вектори $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ на правите q_1, q_2. Тогава

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2}{|\boldsymbol{\tau}_1||\boldsymbol{\tau}_2|} \cdot \tag{17}$$

в) при известни ъглови коефициенти
$k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1, k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$ на правите q_1, q_2. Тогава

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| \cdot \tag{18}$$

q_1 и q_2 са успоредни, ако $k_1 = k_2$;
q_1 и q_2 са перпендикулярни, ако $k_1k_2 = -1$.

<u>Пример</u>: Правите

$$q_1 \equiv 2x - y + 2 = 0,\ q_2 \equiv x + 2y - 3 = 0$$

имат нормални вектори
$\mathbf{n_1} = (2, -1), \mathbf{n_2} = (1, 2)$.
Тогава

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{4+1}\sqrt{1+4}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90°.$$