5 Криви от втора степен

Уравненията на кривите от втора степен имат вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (*)$$

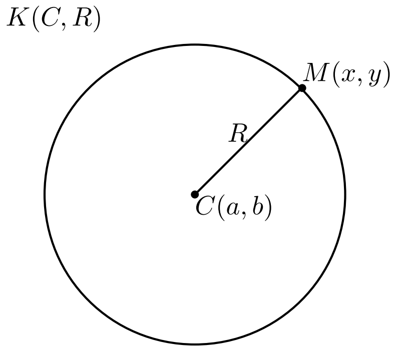
където $|A| + |B| + |C| \neq 0$.

Уравнение (*) определя в равнината Oxy, така наречените, **конични сечения**: окръжност, парабола, елипса, хипербола, прави, точка. Те се получават при пресичането на конична повърхнина с равнина.

1. Окръжност

а) Определение: **Окръжност** се нарича множеството от точки M, които са равноотдалечени от дадена точка.

Окръжност $K(C, R)$ с **център** точка $C(a, b)$ и **радиус** R.



Уравнението на такава окръжност има вида

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Оказва се, че уравнение (*) може да бъде уравнение на окръжност, ако коефициентите пред x^2 и y^2 са равни ($A = C$) и в (*) липсва xy ($B = 0$).

б) Намиране на центъра и радиуса на окръжност.

Извършва се, като в лявата част на уравнението се отделят точни квадрати за променливите x и y.

Пример: Уравнението от втора степен

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$

може да е уравнение на окръжност, понеже $A = C = 1,\ B = 0$. Отделяме точни квадрати:

$$\underbrace{x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2} + \underbrace{y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2} = 6 + 1^2 + 3^2.$$

Тогава

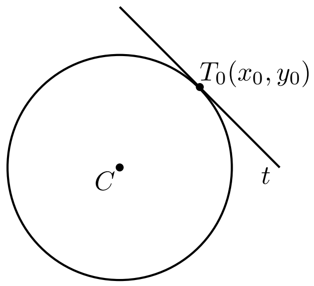
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Следователно $a = 1,\ b = -3$, центърът е в точка $C(1, -3)$, а радиусът е $R = \sqrt{16} = 4$.

в) Допирателна към окръжност.

Нека се търси допирателната t към окръжността $K(C, R)$ с уравнение (1), прекарана през точка $T_0(x_0, y_0)$. Възможни са два случая:

• Точка $T_0(x_0, y_0) \in K(C, R)$.



Тогава уравнението на допирателната е

$$t \equiv (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2. \quad (2)$$

Коментар: Как се записва уравнение (2), ако е дадено уравнението на окръжността (1)?

Пример: Да се намери допирателната към окръжността $K \equiv (x - 2)^2 + y^2 = 10$, прекарана през точка $T_0(3, 3)$.

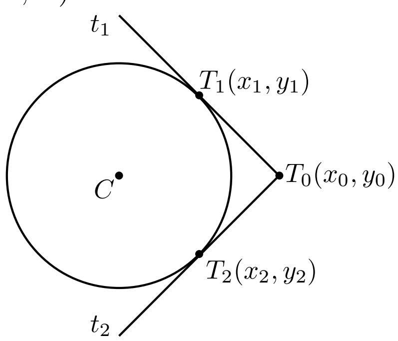
Понеже $(3 - 2)^2 + 3^2 = 10$, то $T_0 \in K$. От уравнение (2) следва, че

$(3 - 2)(x - 2) + 3 \cdot y = 10$,

откъдето получаваме

$$t \equiv x + 3y - 12 = 0.$$

• Точка $T_0(x_0, y_0)$ е външна за окръжността $K(C, R)$.



Тогава първо се намират допирните точки $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$ на допирателните t_1 и t_2

към K, като се реши системата

$$\begin{vmatrix} (x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \\ (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2, \end{vmatrix} \qquad (3)$$

след което уравненията на тези допирателни се получават, както е показано в предния случай.

Пример: Да се намерят допирателните към окръжността $K \equiv (x-2)^2+y^2=10$, прекарани през точка $T_0(0,4)$.

Понеже $(0-2)^2+4^2=16>10$, то точка T_0 е външна за окръжността K. От (3) получаваме система за определяне на допирните точки:

$$\begin{vmatrix} (x-2)^2+y^2=10, \\ (0-2)(x-2)+4y=10, \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{vmatrix} (x-2)^2+y^2=10, \\ -2x+4y=6, \end{vmatrix}$$

Решенията на тази система са $x_1=3, y_1=3$ и $x_2=-1, y_2=1$. Следователно допирните точки са $T_1(3,3)$ и $T_2(-1,1)$.

Допирателната през T_1 има уравнение

$$t_1 \equiv x+3y-12=0,$$

което е получено в предния пример.

Допирателната през T_2 има уравнение

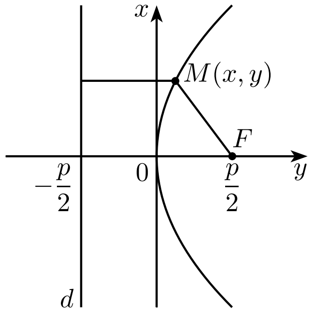
$$(-1-2)(x-2)+1\cdot y=10,$$

т.е.

$$t_2 \equiv 3x-y+4=0.$$

2. Парабола

а) Определение: **Парабола** се нарича множеството от точки M, които са равноотдалечени от дадена права d и дадена точка F, нележаща на правата.



Означение:

Π – парабола;

d – **директриса** на параболата Π;

F – **фокус** на параболата Π.

Ако директрисата има уравнение $d \equiv x=-\frac{p}{2}$, а фокусът е $F(\frac{p}{2},0)$, то уравнението на параболата има вида

$$y^2=2px. \qquad (4)$$

Ако директрисата има уравнение $y=-\frac{p}{2}$, а фокусът е $F(0,\frac{p}{2})$, то уравнението на параболата има вида

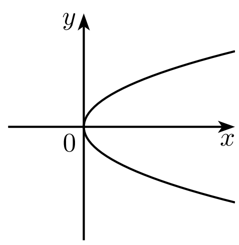
$$x^2=2py. \qquad (5)$$

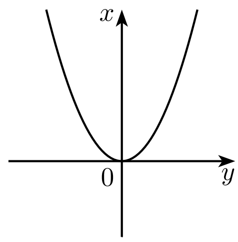
Тези две уравнения са възможно най-простите уравнения на парабола и се наричат **канонични**.

б) Форма на параболата.

Параболата е симетрична спрямо своята **ос** – правата, която минава през фокуса и е перпендикулярна на директрисата.

Параболите с уравнения (4) и (5) са показани на Фиг..





в) Допирателна към парабола.

Нека се търси допирателната t към параболата Π с уравнение (4), прекарана през точка $T_0(x_0,y_0)$. Възможни са два случая:

- Точка $T_0(x_0,y_0) \in \Pi$. Тогава уравнението на допирателната е

$$t \equiv y_0y=p(x+x_0). \qquad (6)$$

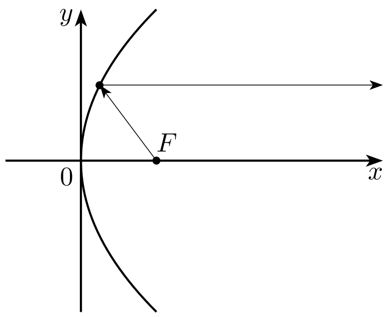
- Точка $T_0(x_0,y_0)$ е външна за параболата Π (не се намира в частта, съдържаща фокуса F). Тогава през тази точка може да се прекарат две допирателни t_1 и t_2, имащи допирни точки T_1 и T_2 с параболата. Допирните точки се намират, като се реши системата

$$\begin{vmatrix} y^2=2px, \\ y_0y=p(x+x_0), \end{vmatrix} \qquad (7)$$

след което уравненията на допирателните се получават, както е показано в предния случай.

Задача: За параболата П с уравнение (5) да се напишат уравненията на допирателната t през точка $T_0(x_0, y_0) \in \Pi$ и системата за намиране на допирните точки T_1 и T_2 на допирателните през точка $T_0(x_0, y_0)$, нележаща на П.

г) Оптично свойство на параболата.

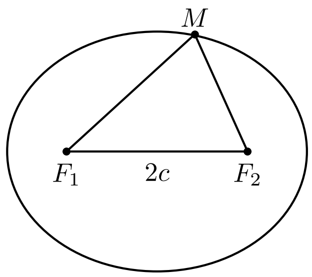


3. Елипса

Нека F_1 и F_2 са две точки в равнината, наречени **фокуси**, и $|F_1F_2| = 2c$.
а) Определение: **Елипса** се нарича множеството от точки M, за които

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a,$$

където $a > c$.



Ако фокусите са $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, елипсата има канонично уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8}$$

където $b^2 = a^2 - c^2$.
Означения:

E – елипса;

a – **голяма полуос**;

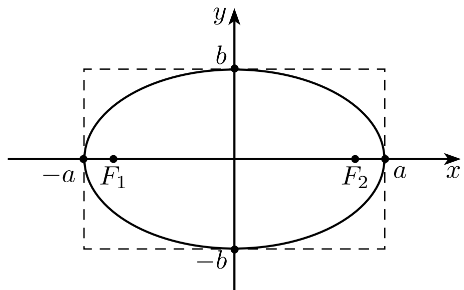
b – **малка полуос**.

б) Форма на елипсата.
Елипсата е симетрична спрямо осите Ox и Oy. От (8) следват зависимостите

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow |x| \leq a,$$

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \Rightarrow |y| \leq b,$$

които показват, че елипсата е ограничена в правоъгълника $|x| \leq a, |y| \leq b$, като се допира до него в точките $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$.



Числото $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ $(0 \leq \varepsilon < 1)$ се нарича **ексцентрицитет** на елипсата.

При нарастването на ε елипсата става все по-сплесната. При $\varepsilon = 0$ получаваме, че

$c = 0\ (F_1 \equiv F_2), b = a$

и елипсата се превръща в окръжността

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Ще отбележим, че проекцията на окръжност върху равнина е елипса.

в) Допирателна към елипса.

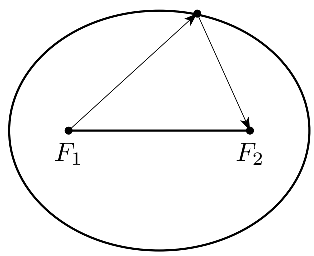
• Точка $T_0(x_0, y_0) \in E$. Тогава уравнението на допирателната е

$$t \equiv \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1. \tag{9}$$

• Точка $T_0(x_0, y_0)$ е външна за елипсата (не се намира в частта, съдържаща фокусите). Тогава през тази точка може да се прекарат две допирателни t_1 и t_2, имащи допирни точки T_1 и T_2 с елипсата. Допирните точки се намират, като се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1. \end{array}\right. \tag{10}$$

г) Оптично свойство на елипсата.



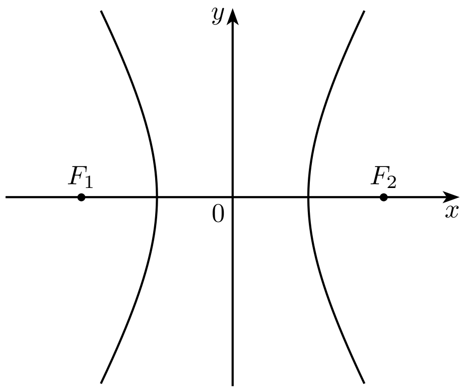
4. Хипербола

а) Определение: Нека F_1 и F_2 са два фокуса в равнината и $|F_1F_2| = 2c$.

Хипербола се нарича множеството от точки M, за които

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a,$$

където $0 < a < c$.



Ако фокусите са $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, хиперболата има канонично уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11}$$

където $b^2 = c^2 - a^2$.

Означения:

X – хипербола;

a – **реална полуос**;

b – **имагинерна полуос**.

б) Форма на хиперболата.

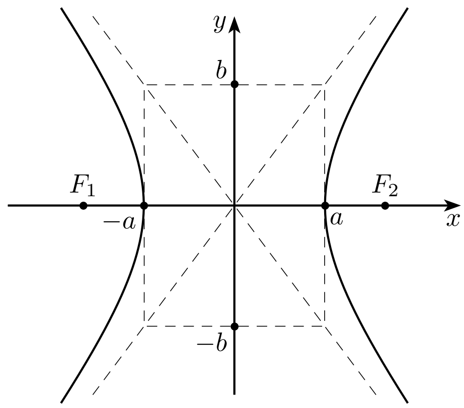
Хиперболата е симетрична спрямо осите Ox и Oy. От (11) следват зависимостите

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow |x| \geq a.$$

Хиперболата има асимптоти

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x,$$

които са продължения на диагоналите на правоъгълника $|x| \leq a, |y| \leq b$, като хиперболата се допира до него в точките $(a, 0), (-a, 0)$.



в) Допирателна към хипербола.

• Точка $T_0(x_0, y_0) \in X$. Тогава уравнението на допирателната е

$$t \equiv \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1. \tag{12}$$

• Точка $T_0(x_0, y_0)$ е външна за хиперболата X (не се намира в частта, съдържаща някой от фокусите). Тогава през тази точка може да се прекарат две допирателни t_1 и t_2, имащи допирни точки T_1 и T_2 с хиперболата. Допирните точки се намират, като се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} = 1. \end{array}\right. \tag{13}$$

г) Оптично свойство на хиперболата.