6 Функции

1. Определение

Понятието **функция** е едно от основните математически понятия. В него е заложена идеята за зависимост на една величина от друга. Така например температурата на кипене на водата зависи от атмосферното налягане, силата на тока зависи от напрежението, атмосферното налягане зависи от надморската височина и т.н.
Обект на по-нататъшните ни разглеждания ще бъдат **реалните** функции.
Нека $X, Y \subset R$ са две числени множества.

Определение 1. ***Функция*** f ***на множеството*** X ***в множеството*** Y *се нарича правилото, по което на всяко число* $x \in X$ *се съпоставя точно едно число* $y \in Y$.

Означения:
$f : X \to Y, \qquad X \xrightarrow{f} Y, \qquad y = f(x), \quad x \in X$

x се нарича **независима променлива**;
y – **зависима променлива** или **стойност на функцията** f **в точка** x;
X–**дефиниционна област (област на определение)** на функцията f.
Означения: $X = D_f = D(f)$.
Обикновено $Y = R$ и не се конкретизира.

2. Задаване на функции

а) **аналитично**
С помощта на математически символи се посочват действията, които трябва да се извършат с независимата променлива, за да се получи съответната стойност на функцията, т.е. при аналитичното задаване стойностите на функцията се определят с формула (формули).

Примери:
$$y = \sqrt{1 - x^2},$$
$$y = \sin x,$$
$$y = \lg |x| + \frac{x^2 - 1}{x - 2},$$
$$y = sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Естествена област на определение на функция, зададена аналитично, се нарича множеството от всички реални числа, за които по дадената формула може да се пресметне стойността на функцията.
Пример: $y = \sqrt{1 - x^2}$
$\Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D = [-1, 1]$.
Пример: $y = \lg |x| + \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$
$\Rightarrow |x| > 0, x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq 2$
$\Rightarrow D = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

б) **таблично**
Задава се с таблица от вида

x	x_1	x_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	y_n

където $x_k, \quad k = 1, \ldots, n$ са стойности на независимата променлива x, а $y_k = f(x_k), \quad k = 1, \ldots, n$ са съответните стойности на функцията $y = f(x)$. Използва се:
– за да се ориентираме относно поведението на аналитично зададена функция $y = f(x)$;
– за търсене на функционална зависимост между величините x, y по таблично представени експериментални данни.

в) **графично**
Нагледна представа за изменението на зависимата променлива y при изменението на независимата променлива x се получава при графичното задаване на функцията с помощта на нейната графика.
Графика на функцията $y = f(x), \quad x \in D_f$ се нарича множеството от точки в равнината Oxy, които имат координати
$$(x, f(x)), \quad x \in D_f.$$

Примери: сеизмограми, кардиограми, лампови (транзисторни) характеристики и др.

3. Действия с функции. Съставна функция. Обратна функция

• Сума, разлика, произведение и частно на две функции f и g при дадено x от общата област на определение $D = D_f \cap D_g$ се получават, като извършим съответните действия със стойностите $f(x)$ и $g(x)$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{ако } g(x) \neq 0.$$

• Нека $g : X \to R$ и $f : Y \to R$ са реални функции и множеството $D \subset X$ е такова, че $g(x) \in Y$ за всяко $x \in D$. Тогава функцията $h : D \to R$, определена по формулата

$$h(x) = f[g(x)], \quad x \in D,$$

се нарича **съставна функция** (сложна функция, суперпозиция) на функциите f и g. Условно функцията f се нарича външна, а функцията g – вътрешна на съставната функция h.
<u>Пример</u>: Функцията $y = h(x) = \sqrt{1-x^2}$ е съставна функция на функциите $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ и $g(x) = 1 - x^2$, $x \in R$ и е определена в множеството $D = [-1, 1]$.
• Нека $X \subset R$, $Y \subset R$ и функцията $f : X \to Y$ задава взаимно-еднозначно съответствие между X и Y. Това означава, че всяко $x \in X$ има точно един образ $y = f(x) \in Y$ и обратно на всяко $y \in Y$ съответства единствено $x \in X$, за което

$$f(x) = y. \tag{1}$$

Следователно уравнение (1) определя единствена функция $g : Y \to X$, която на всяко $y \in Y$ съпоставя единственото решение $x \in X$ на уравнение (1). Тази функция се нарича **обратна функция** на функцията f и има свойството, че

$$f[g(y)] = y \quad \forall y \in Y.$$

Лесно се заключава, че функцията f е обратна на функцията g и

$$g[f(x)] = x \quad \forall x \in X.$$

Прието е функцията, която е обратна на функцията f да се означава с f^{-1}, а независимата променлива на f^{-1} да се означава отново с x. Тогава

$$f^{-1}[f(x)] = x \quad \forall x \in D(f),$$

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \forall x \in D(f^{-1}).$$

Ще отбележим, че графиката на f^{-1} е симетрична на графиката на f спрямо правата $y = x$.
Практически намирането на обратната функция f^{-1} се извършва, като се реши относно y уравнението

$$f(y) = x.$$

<u>Пример</u>: За функцията $f(x) = x^3$ обратната функция се получава като решение на уравнението $y^3 = x, \quad x \in R$, т.е. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

<u>Пример</u>: За функцията $f(x) = a^x$ обратната функция се получава като решение на уравнението

$$a^y = x, \quad x \geq 0,$$

т.е. $f^{-1}(x) = \log_a x$.

4. Класификация на функции

а) явни, неявни: $F(x, y) = 0$
б) ограничени, неограничени
в) монотонни (растящи, намаляващи)
г) четни, нечетни
Необходимо е $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.
$f(x)$ е **четна**, ако $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$.
$f(x)$ е **нечетна**, ако $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$.
– графиката на четна функция е симетрична относно оста Oy;
– графиката на нечетна функция е симетрична относно координатното начало т. O;
<u>Пример</u>: $y = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$

$$y(-x) = \lg \frac{1-x}{1+x} = \lg \Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^{-1} = -\lg \frac{1+x}{1-x} = -y(x).$$

Функцията е нечетна.
<u>Пример</u>: $y = \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}$

$$y(-x) = \sqrt[3]{-x-1} - \sqrt[3]{-x+1} = -\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = y(x).$$

Функцията е четна.
д) периодични
Функцията $f(x)$ е **периодична** с **период** $T > 0$, ако $\forall x \in D \Rightarrow x + T \in D$, $x - T \in D$ и

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

Лема 1. *Ако T е период на периодичната функция $f(x)$, то числата nT, $n \in N$ също са периоди на $f(x)$.*

Най-малкият положителен период на периодична функция се нарича основен период (период) на тази функция.

Примери: Функцията $y = \sin x$ има период $T = 2\pi$, а функцията $y = \operatorname{tg} x$ – период $T = \pi$.

Лема 2. *Ако T е период на периодичната функция $f(x)$ и $\omega > 0$, то функцията $g(x) = f(\omega x)$ има период $\dfrac{T}{\omega}$.*

Пример: Функцията $y = \sin 4x$ има период $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Обратни тригонометрични функции

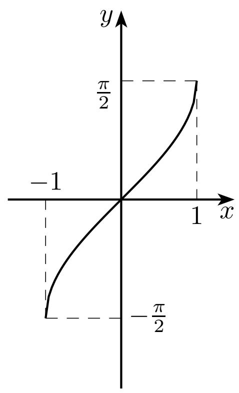
Коментар: Представката *arc* се чете „аркус”.

а) $y = \arcsin x$

Обратна е на $y = \sin x$ и се получава като решение на уравнението

$$\sin y = x, \quad x \in [-1, 1],$$

което е в интервала $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

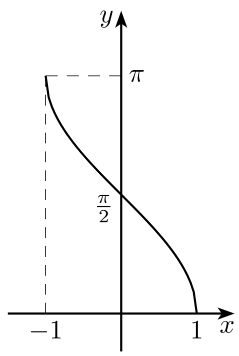


б) $y = \arccos x$

Обратна е на $y = \cos x$ и се получава като решение на уравнението

$$\cos y = x, \quad x \in [-1, 1],$$

което е в интервала $[0, \pi]$.

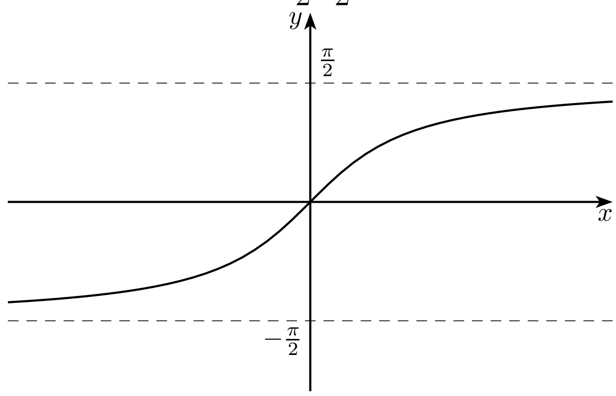


в) $y = \operatorname{arctg} x$

Обратна е на $y = \operatorname{tg} x$ и се получава като решение на уравнението

$$\operatorname{tg} y = x, \quad x \in R,$$

което е в интервала $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.

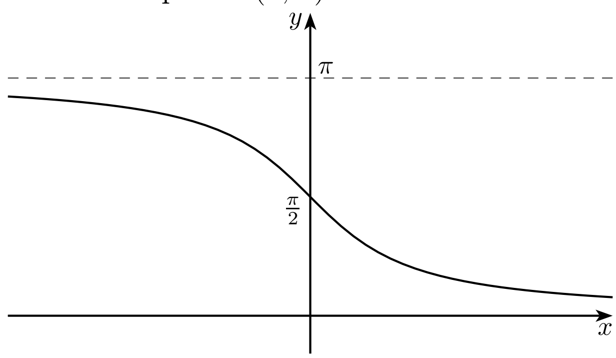


г) $y = \operatorname{arccotg} x$

Обратна е на $y = \operatorname{cotg} x$ и се получава като решение на уравнението

$$\operatorname{cotg} y = x, \quad x \in R,$$

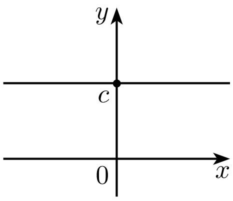
което е в интервала $(0, \pi)$.



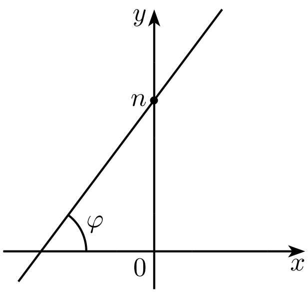
6. Някои основни функции и техните графики (преговор)

- $y = c = const.$
- $y = kx + n \quad (k = \operatorname{tg} \varphi)$
- $y = x^2$
- $y = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0)$
- $y = x^\alpha, \quad x \geq 0, \ (a > 0)$
- $y = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$
- $y = a^x, \quad (0 < a < 1, \ a > 1)$
- $y = \log_a x, \quad x > 0, \ (0 < a < 1, \ a > 1)$
- $y = \sin x$
- $y = \cos x$
- $y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $y = \operatorname{cotg} x, \quad x \neq k\pi$

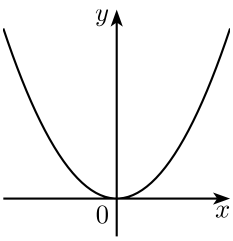
- $y = c = const.$



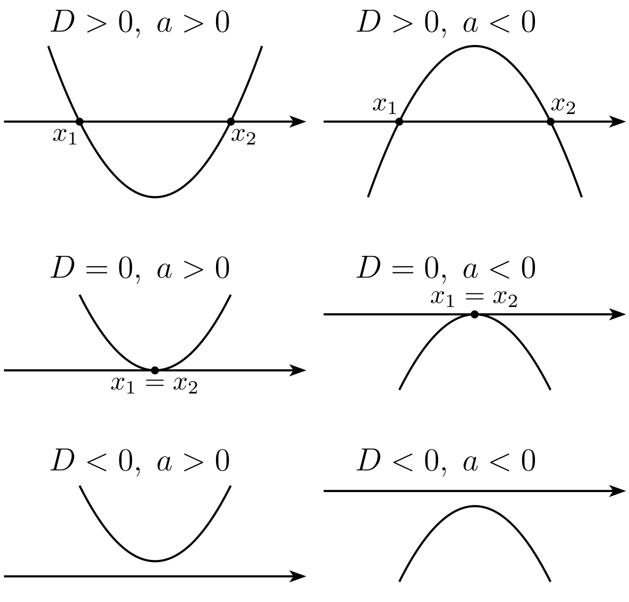
- $y = kx + n \quad (k = \operatorname{tg}\varphi)$



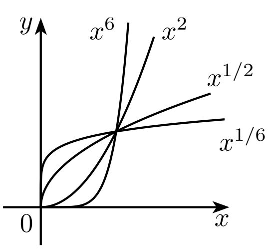
- $y = x^2$



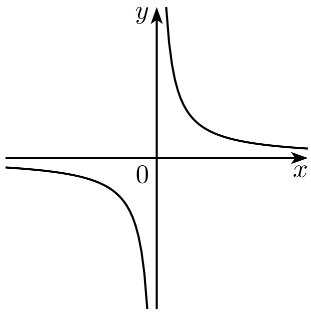
- $y = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0)$



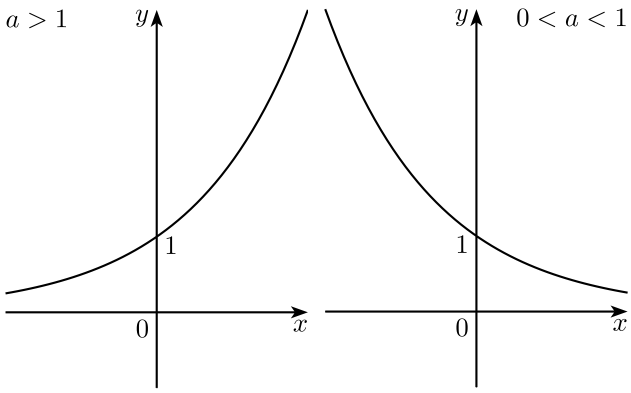
- $y = x^\alpha, \quad x \geq 0, \ (\alpha > 0)$



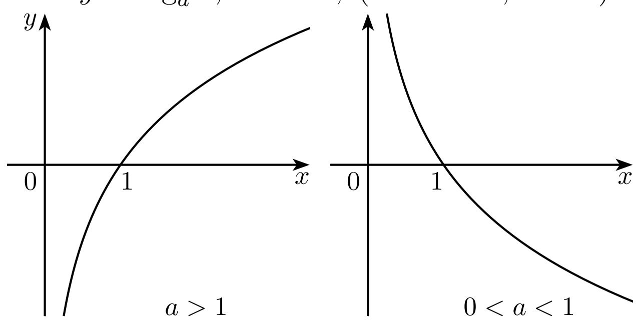
- $y = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$



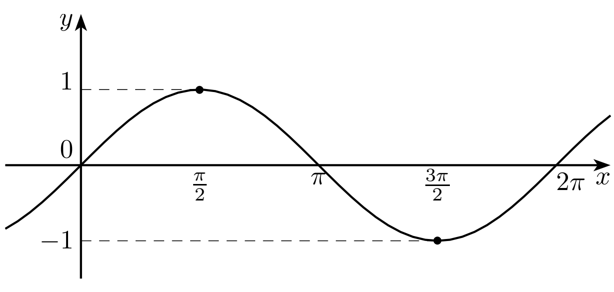
- $y = a^x, \quad (0 < a < 1, \ a > 1)$



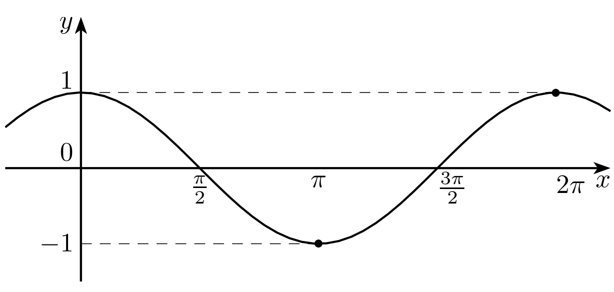
- $y = \log_a x, \quad x > 0, \ (0 < a < 1, \ a > 1)$



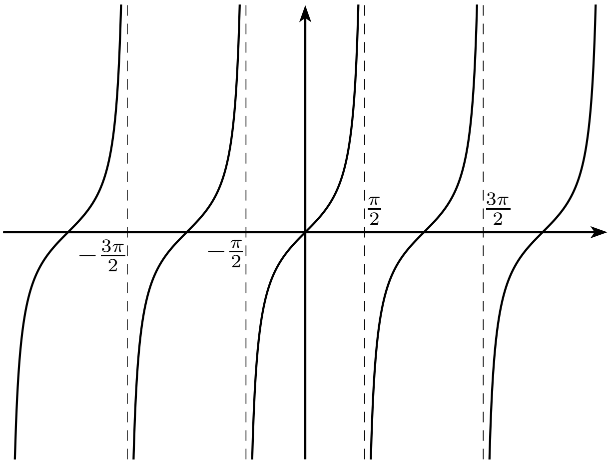
- $y = \sin x$



- $y = \cos x$



- $y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$



- $y = \operatorname{cotg} x, \quad x \neq k\pi$