7 Граница на функция

1. Граница на числена редица

Ще считаме, че от училищния курс по математика на читателя е известно понятието граница на числена редица $\{x_n\}$ и основните му разновидности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (x_n \to a,\ n \to \infty) \quad a - \text{крайно}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad (x_n \to +\infty,\ n \to \infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad (x_n \to -\infty,\ n \to \infty)$$

Нека $D \subset R$ е числено множество и x_0 е число или един от символите $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 1. *Числото x_0 се нарича* **точка на сгъстяване на множеството** D*, ако съществува редица $\{x_n\}$ такава,че:*
1) $x_n \in D,\ x_n \neq x_0\ \forall n \geq 1$;
2) $x_n \to x_0,\ n \to \infty$.

Определението означава, че ако x_0 е точка на сгъстяване на множеството D, то можем да се „приближим" произволно близко до нея, „движейки се" само по точки x_n от множеството D.
Примери: Точките на сгъстяване на интервала $(0, +\infty)$ са точките от интервала $[0, +\infty)$ и безкрайната точка $+\infty$.
Точките на сгъстяване на интервала $(1, 2)$ са точките от интервала $[1, 2]$.

2. Граница на функция

Нека $f : D \to R$ и x_0 е точка на сгъстяване на множеството D.

Определение 2. *Числото a (или символа $+\infty$ или $-\infty$) се нарича* **граница на функцията f при x клонящо към** x_0*, ако за всяка редица $\{x_n\}$, която удовлетворява условията*
1) $x_n \in D,\ x_n \neq x_0\ \forall n \geq 1$;
2) $x_n \to x_0,\ n \to \infty$
е изпълнено

$$f(x_n) \to a,\ n \to \infty.$$

Означение: $f(x) \to a,\ x \to x_0$ или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Тълкуване: Ако от това, че x се приближава към x_0 (без да е равно на x_0!) следва, че $f(x)$ се приближава към a.
Нека x_0 е крайна точка на сгъстяване на D.

Определение 3. *Числото a (или символа $+\infty$ или $-\infty$) се нарича* **дясна граница на функцията f при x клонящо към** x_0*, ако за всяка редица $\{x_n\}$, която удовлетворява условията*
1) $x_n \in D,\ x_n > x_0\ \forall n \geq 1$;
2) $x_n \to x_0,\ n \to \infty$.
е изпълнено

$$f(x_n) \to a,\ n \to \infty.$$

Означение: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$.
Аналогично се определя понятието **лява граница**, която се означава така:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a.$$

Дайте определението за лява граница!
Съкратено дясната и лявата граница се означават още така: $f(x_0^+)$, $\quad f(x_0^-)$.

Теорема 1.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff f(x_0^+) = f(x_0^-) = a.$$

Понеже x може да клони към x_0, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$, а $f(x)$ – към $a, +\infty, -\infty$, то са възможни 15 разновидности на понятието граница.
Формулирайте всички възможни варианти!
В литературата се среща и записът

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a,$$

който означава, че

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a.$$

Геометрично тълкуване:
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

3. Теореми за граница на функция

Теорема 2. *Нека $f : D \to R$, $g : D \to R$ и съществуват крайните граници*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = p, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = q.$$

Тогава:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \forall c \in R$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *ако* $q \neq 0$.

4. Някои основни граници

Известни са следните основни граници:

$$\lim_{x\to x_0} c = c \quad \forall c \in R, \quad \lim_{x\to x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

В основната граница

$$\lim_{x\to\pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e. \qquad (1)$$

числото $e = 2,7182818284590452353602874 7\ldots$ е ирационално и се нарича **неперово число**.[1] С числото e са свързани показателната и логаритмична функции с основа $a = e$:
$y = e^x,\ x \in R$ (**експонента**) и
$y = \ln x = \log_e x,\ x > 0$
(**натурален логаритъм**).

5. Някои способи за пресмятане на граници

а) чрез непосредствено заместване.

Пример: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \dfrac{2^2+1}{2-1} = 5$.

б) Ако $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ и $Q_m(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0)$, то

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0, & \text{ако } n < m \\ \infty, & \text{ако } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{ако } n = m \end{cases}$$

[1] по името на Нѐпер (Napier – шотландски математик)

Пример: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x^2-1}{x-x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x^2}{-x^3} = 0$, понеже $n = 2 < 3 = m$.

Пример: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6x^3-2x^2+1}{3x^3+4x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6x^3}{3x^3} = \dfrac{6}{3} = 2$, понеже $n = m = 3$.

в) Нека $P_n(x_0) = 0$, $Q_m(x_0) = 0$ и да разгледаме границата

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}. \qquad (2)$$

В този случай, от основната теорема на алгебрата следва, че

$$P_n(x) = (x-x_0)p(x), \quad Q_m(x) = (x-x_0)q(x),$$

където $p(x)$ и $q(x)$ са полиноми съответно от степени $n-1$ и $m-1$. Тогава

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)p(x)}{(x-x_0)q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}. \qquad (3)$$

Ако границата (3) не може да се пресметне чрез заместване и се окаже, че $p(x_0) = q(x_0) = 0$, то повтаряме горната процедура, докато не получим търсената граница (2).

Пример: Да пресметнем границата

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-4x^3+3x}{x^3-2x^2+1}.$$

Понеже полиномите $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x$ и $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ се анулират при $x = 1$, то

$$P(x) = (x-1)p(x), \quad Q(x) = (x-1)q(x).$$

За да намерим частните $p(x), q(x)$ от делението на $P(x), Q(x)$ с $x - 1$ прилагаме правилото на Хорнер:

	1	−4	0	3	0
1	1	−3	−3	0	0

	1	−2	0	1
1	1	−1	−1	0

Следователно
$p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x, \quad q(x) = x^2 - x - 1$ и

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-4x^3+3x}{x^3-2x^2+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^3-3x^2-3x)}{\cancel{(x-1)}(x^2-x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2-3x}{x^2-x-1} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

г) чрез рационализиране
При прилагане на този способ се използват формулите

$$(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A - B,$$

$$(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}) = A - B,$$

$$(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}) = A + B,$$

позволяващи да се рационализират знаменателят или числителят на дадена ирационална дроб, след което да се намери нейната граница.
Пример:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x+7-9}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}\,.$$

д) чрез смяна на променливата
При намирането на дадена граница може да се използва смяна на променливата $x = u(t)$, където функцията $u(t)$ е такава, че $u(t)\to x_0$, при $t\to t_0$. Тогава

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to t_0} f[u(t)]. \tag{4}$$

Пример:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = (x = t^6,\ \sqrt{x} = t^3,\ \sqrt[3]{x} = t^2)$$
$$= \lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)}{\cancel{(t-1)}(t+1)} = \frac{3}{2}\,.$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = (x = \sin t,\ t = \arcsin x)$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1.$$

И така,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1. \tag{5}$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{6}$$

д) използване на основните граници

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \tag{7}$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\dfrac{\operatorname{tg}\beta x}{\beta x}}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{1}{1}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Наистина,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

е) използване на основната граница

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e. \tag{9}$$

Пример:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{6x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{30} = e^{30}.$$

Пример:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1+3}{x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right]^{\frac{3}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x}} = e^3.$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{10}$$

Наистина

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{11}$$

Наистина

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = (e^x-1 = u,\ x = \ln(1+u))$$
$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} = 1.$$

6. Асимптоти

Нека функцията f е определена в множеството D и a е точка на сгъстяване на D (a е крайна или $+\infty$, или $-\infty$).
Една от задачите при изследване на дадената функция f е да се определи какво е нейното поведение, когато независимата променлива x клони към точката на сгъстяване a. В някои случаи точката $(x, f(x))$ от графиката на функцията f се приближава при $x \to a$ към някаква права, която се нарича **асимптота на функцията** f. Асимптотите биват: вертикални, хоризонтални и наклонени.

Нека a е крайна точка на сгъстяване.

Определение 4. *Правата $x = a$ се нарича* ***вертикална асимптота на функцията*** *f, ако една от границите*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

е безкрайна ($+\infty$ или $-\infty$).

Пример: Функцията $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ има вертикална асимптота $x = 0$.
Пример: Функцията $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ има вертикални асимптоти $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

Нека $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Определение 5. *Правата $y = b$ се нарича* ***хоризонтална асимптота на функцията*** *f при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), ако*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \qquad \Big(\lim_{x\to-\infty} f(x) = b\Big).$$

Пример: Функцията $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ има хоризонтална асимптота $y = 0$ при $x \to \pm\infty$.
Пример: Функцията $y = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$, $x \in R$ има хоризонтална асимптота $y = -1$ при $x \to \pm\infty$.
Пример: Функцията $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in R$ има хоризонтални асимптоти $y = \dfrac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ и $y = -\dfrac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$.
Ако границите

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

са безкрайни (равни на $+\infty$ или $-\infty$), то функцията f няма хоризонтални асимптоти, но може да има наклонена асимптота.

Определение 6. *Правата $y = kx+n$ се нарича* ***наклонена асимптота на функцията*** *f при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), ако*

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx - n] = 0$$

$$\Big(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx - n] = 0\Big).$$

От определението следва, че параметрите k и n на наклонената асимптота $y = kx + n$ (например при $x \to +\infty$) се намират с последователно пресмятане на границите:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]. \quad (12)$$

Забележка: Ако поне една от горните граници не е крайна, то функцията f няма наклонена асимптота при $x \to +\infty$.
Забележка: Асимптотите на дадена функция $f : D \to R$ се търсят за тези точки на сгъстяване на множеството D, които са крайни точки на дефиниционните подинтервали, от които се състои D.
Пример: Функцията $y = x - 2\operatorname{arctg} x$, $x \in R$ има наклонени асимптоти $y = x - \pi$ при $x \to +\infty$ и $y = x + \pi$ при $x \to -\infty$.
Пример: Функцията $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{|x|}$, $x \neq 0$ има наклонени асимптоти $y = x - 2$ при $x \to +\infty$ и $y = -x + 2$ при $x \to -\infty$.
Пример: Функцията $y = \dfrac{x^2 - 3x - 6}{2 - x}$, $x \neq 2$ има вертикална асимптота $x = 2$ и наклонена асимптота $y = -x + 1$ при $x \to \pm\infty$.