8 Непрекъснатост на функция

1. Определение

Нека $f : D \to R$ и $x_0 \in D$ е точка на сгъстяване на D.

Определение 1. *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** x_0*, ако за всяка редица $\{x_n\}$, за която*
1) $x_n \in D,\ x_n \neq x_0\ \forall n \in N$
2) $x_n \to x_0,\ n \to \infty$
е изпълнено

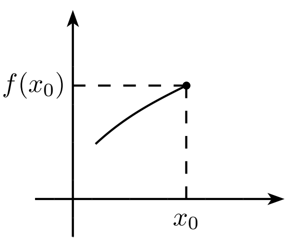
$$f(x_n) \to f(x_0),\ n \to \infty.$$

Ще отбележим, че точката x_0, в която функцията f е непрекъсната, задължително принадлежи на дефиниционната област D!

Възможни са следните случаи:

а) Съществува лявата граница $f(x_0^-)$. Тогава функцията f се нарича **непрекъсната отляво в точката** x_0, ако

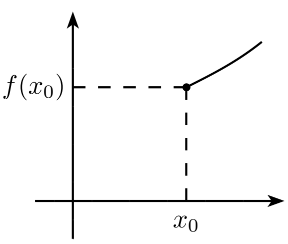
$$f(x_0^-) = f(x_0).$$



$f(x_0^-) = f(x_0)$

б) Съществува дясната граница $f(x_0^+)$. Тогава функцията f се нарича **непрекъсната отдясно в точката** x_0, ако

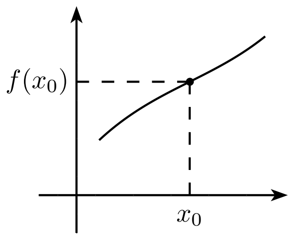
$$f(x_0^+) = f(x_0).$$



$f(x_0^+) = f(x_0)$

в) Съществуват и двете граници: лявата $f(x_0^-)$ и дясната $f(x_0^+)$. Тогава функцията f е непрекъсната в точката x_0 тогава и само тогава, когато е непрекъсната отляво и непрекъсната отдясно в точката x_0, т.е., когато

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0). \tag{1}$$



$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$

Нека $M \subset R$ е числено множество.

Определение 2. *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в множеството*** M*, ако функцията f е непрекъсната във всяка точка на множеството M.*

Означение: $f \in C(M) \Leftrightarrow$ функцията f е непрекъсната в множеството M;
$f \in C(x_0) \Leftrightarrow$ функцията f е непрекъсната в точката x_0.

2. Действия с непрекъснати функции

Теорема 1. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката x_0. Тогава:*
1) *$f(x) + g(x)$ е непрекъсната в точката x_0;*
2) *$f(x) \cdot g(x)$ е непрекъсната в точката x_0;*
3) *Ако допълнително $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е непрекъсната в точката x_0.*

От тази теорема следва, че дробните рационалните функции са непрекъснати в своите дефиниционни области.

3. Непрекъснатост на съставна и обратна функции

Теорема 2. *Ако съществува границата*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = p \in R$$

и функцията $f(u)$ е непрекъсната в точката p, то

$$\lim_{x \to x_0} f[u(x)] = f(p),$$

т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f[u(x)] = f[\lim_{x \to x_0} u(x)]. \tag{2}$$

Теорема 3. *Ако функцията $u(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и функцията $f(u)$ е непрекъсната в точката $u(x_0)$, то функцията $f[u(x)]$ е непрекъсната в точката x_0.*

Теорема 4. *Нека функцията f има обратна f^{-1}, $x_0 \in D(f)$ и $y_0 = f(x_0) \in D(f^{-1})$. Тогава*

$$f \in C(x_0) \Leftrightarrow f^{-1} \in C(y_0).$$

4. Точки на прекъсване

Нека функцията $f(x)$ е определена в интервала (a, b) с изключение евентуално на точката $x_0 \in (a, b)$.

Определение 3. *Точката x_0 се нарича* ***точка на прекъсване за функцията*** *$f(x)$, ако функцията $f(x)$ не е непрекъсната или не е определена в точката x_0.*

Функцията $f(x)$ не е непрекъсната в точката x_0, ако е нарушено някое от условията

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0).$$

Възможни са следните случаи:

I. Съществуват и са равни крайните граници

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = A, \tag{3}$$

но $f(x_0) \neq A$ или $f(x)$ не е определена в точката x_0. Тогава точката на прекъсване x_0 се нарича **отстранима точка на прекъсване** (точка на отстранимо прекъсване) за функцията $f(x)$.

Ако положим $f(x_0) = A$, то функцията $f(x)$ става непрекъсната в точката x_0.

Пример: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не е определена в точката $x = 0$, но понеже

$$f(0^-) = f(0^+) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то функцията

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

е непрекъсната в точката $x = 0$ и в интервала $(-\infty, +\infty)$.

II. Съществуват крайните граници $f(x_0^-)$ и $f(x_0^+)$, но

$$f(x_0^-) \neq f(x_0^+).$$

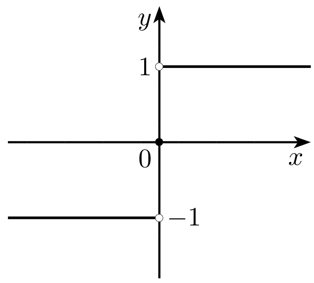
Тогава x_0 се нарича **точка на прекъсване от първи род** за функцията $f(x)$.

Ако положим $f(x) = f(x_0^-)$, то функцията $f(x)$ става непрекъсната отляво в точката x_0, а ако положим $f(x) = f(x_0^+)$, то функцията $f(x)$ става непрекъсната отдясно в точката x_0.

Пример: Функцията

$$y = sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

има прекъсване от първи род в точката $x = 0$. понеже $y(0^-) = -1 \neq 1 = y(0^+)$.



$y = sgn(x)$

III. Една от границите $f(x_0^-)$ или $f(x_0^+)$ не съществува или е безкрайна. Тогава x_0 се нарича **точка на прекъсване от втори род** за функцията $f(x)$.

Пример: Функцията $f(x) = \operatorname{tg} x$ има прекъсване от втори род в точките $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$, понеже $f(x_k^{\pm}) = \mp\infty$.

Определение 4. *Функцията $f(x)$ се нарича* ***непрекъсната по части в затворения интервал*** *$[a, b]$, ако:*
1) $f(x)$ е определена в $[a, b]$ и са крайни границите $f(a^+)$ и $f(b^-)$.
2) $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал (a, b) с изключение на краен брой точки на прекъсване от първи род.

Нека $I \subset R$ е произволен интервал.

Определение 5. *Функцията $f(x)$ се нарича* ***непрекъсната по части в интервала*** *I, ако е непрекъсната по части във всеки затворен интервал $[a, b]$, съдържащ се в I.*

5. Непрекъснати функции в затворен интервал

Определение 6. *Функцията $f(x)$, $x \in I$ се нарича* ***ограничена в интервала*** *I, ако съществува $M > 0$ такова, че $|f(x)| \leq M$ при $x \in I$.*

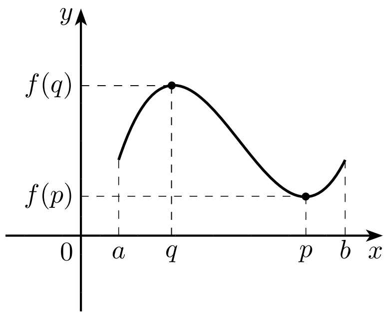
Теорема 5. (*Първа теорема на Ва̀йерщрас*) *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, то тази функция е ограничена в интервала $[a, b]$.*

Забележка: Теоремата не е вярна, ако интервалът не е затворен.

Пример: $f(x) = \dfrac{1}{x}, \ x \in (0, 1]$.

Теорема 6. (*Втора теорема на Вайерщрас*) *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, то тя приема в този интервал най-малката и най-голямата си стойности, т.е.*

$$\exists p, q \in [a, b] : \quad f(p) \le f(x) \le f(q) \quad \forall x \in [a, b].$$



Забележка: Теоремата не е вярна, ако интервалът не е затворен.

Пример: $f(x) = x, \ x \in (0, 1)$.

Теорема 7. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то съществува $c \in (a, b)$ такова, че $f(c) = 0$.*

Коментар: Условието $f(a)f(b) < 0$ означава, че в крайните точки a, b на интервала функцията приема стойности с противоположни знаци.

Забележка: Теоремата се прилага при отделянето на корените на уравнението $f(x) = 0$ преди численото му решаване.