9 Производна на функция

Следващото основно понятие на математическия анализ, което ще разгледаме, е производна на функция. Производните дават възможност за решаване на задачи, които не могат да се решат със средствата на елементарната математика. Например задачата за намиране на допирателна към крива, задачата за скоростта при неравномерно праволинейно движение, задачата за скоростта на химическа реакция и много други задачи от геометрията, физиката, химията и други природни науки водят до въвеждането на понятието производна.

1. Нарастване на аргумент и функция

Нека функцията $f(x)$ е определена в интервала (a,b), точките $x, x_0 \in (a,b)$ и $x \neq x_0$. Числото

$$\Delta x = x - x_0$$

се нарича **нарастване на аргумента в точката** x_0. Тогава

$$x = x_0 + \Delta x \quad \text{и} \quad \Delta x \neq 0.$$

Числото

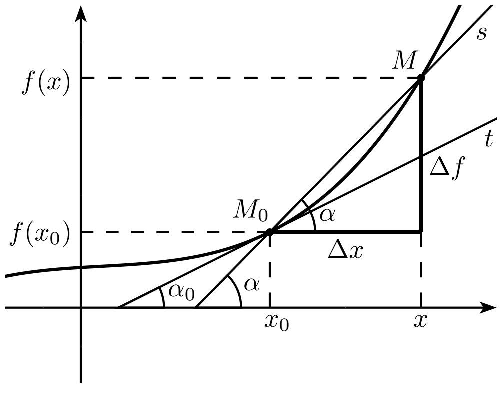
$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

се нарича **нарастване на функцията** f **в точка** x_0 (при нарастване на аргумента Δx). Тогава

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

2. Задача за допирателната

Нека през точките $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M(x, f(x))$ от графиката Γ_f на функцията f е прекарана секущата s и тя сключва ъгъл $\alpha = \alpha(x)$ с оста Ox (Фиг.)



Определение 1. ***Допирателна*** *към графиката на функцията f в точка $M_0(x_0, f(x_0))$ се нарича правата t, минаваща през точка M_0 и заемаща граничното положение на секущата s през точките M_0, M при условие, че $\Delta x \to 0$ ($M \to M_0$).*

Нека допирателната t сключва ъгъл α_0 с оста Ox. Имаме, че

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = \alpha_0, \quad \operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогава

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg}(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

т.е. ъгловият коефициент $k = \operatorname{tg} \alpha_0$ на допирателната към графиката на функцията f в точка $M_0(x_0, f(x_0))$ е равен на

$$k = \operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{1}$$

3. Задача за скоростта

а) При равномерно праволинейно движение скоростта v е равна на

$$v = \frac{S}{t},$$

където S е пътят, изминат за време t.
б) Нека функцията $S = S(t)$ задава изминатия път за време $t \geq 0$. Тогава нарастването

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$$

показва изминатия път за време Δt от момента t до момента $t + \Delta t$, а отношението

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

показва средната скорост на движение в интервала $[t, t + \Delta t]$. Границата

$$v = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{2}$$

се нарича скорост на движение в момент t.

Забелязваме, че в (1) и (2) се търсят сходни граници.

4. Определение на производна

Определение 2. *Границата на отношението*
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
на нарастването на функцията Δf към нарастването на аргумента Δx при $\Delta x\to 0$ се нарича ***производна на функцията f в точката*** *x_0 и се означава с $f'(x_0)$, т.е.*
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Означението $f'(x_0)$ се чете „еф прим от x_0”.

Счита се, че производната съществува, ако границата (3) е крайна или е равна на $-\infty$ или $+\infty$.

Други означения: Ако $y=f(x)$: y' , y'_x.

Определение 3. *Ще казваме, че функцията f е* ***диференцуема в точката*** *x_0, ако в тази точка съществува крайна производна $f'(x_0)$.*

Определение 4. *Ще казваме, че функцията f е* ***диференцуема в интервала*** *(a,b), ако функцията f е диференцуема във всяка точка на този интервал.*

Ако функцията f е диференцуема в интервала (a,b), то на всяко $x\in(a,b)$ се съпоставя $f'(x)$:
$$x\to f'(x),\quad x\in(a,b).$$
По този начин в интервала (a,b) се задава нова функция $f'(x)$ – **производна на функцията f в интервала** (a,b). Операцията по намиране на производната на една функция се нарича **диференциране**.

Общата схема за намиране на производната на функция $f(x)$ е следната:

1) Намираме нарастването
$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x).$$

2) Образуваме отношението
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

3) Търсим границата
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x).$$

Пример: $f(x)=c=const.$
$$\Delta f=c-c=0,\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0\ \forall x.$$
Следователно
$$(c)'=0. \tag{4}$$
Пример: $f(x)=x.$
$$\Delta f=x+\Delta x-x=\Delta x,\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\ \forall x.$$
Следователно
$$(x)'=1. \tag{5}$$
Пример: $f(x)=\ln x.$
$$\Delta f=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\big(\frac{x+\Delta x}{x}\big)=\ln\big(1+\frac{\Delta x}{x}\big),$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\ln\big(1+\frac{\Delta x}{x}\big)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\big(1+\frac{\Delta x}{x}\big)$$
$$=\frac{1}{x}\ln\big(1+\frac{\Delta x}{x}\big)^{\frac{x}{\Delta x}}\to\frac{1}{x}\ln e,\ \Delta x\to 0.$$
Следователно
$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\ x>0. \tag{6}$$
Следващата теорема показва връзката между свойствата непрекъснатост и диференцуемост на функция.

Теорема 1. *Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0, то $f(x)$ е непрекъсната в x_0.*

Обратното твърдение не винаги е вярно!

Пример: В точката $x_0=0$ функцията $f(x)=|x|$ е непрекъсната, но не е диференцуема. Наистина
$$\Delta f=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|-|0|=|\Delta x|,$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\begin{cases}\frac{\Delta x}{\Delta x}, & \Delta x>0\\ \frac{-\Delta x}{\Delta x}, & \Delta x<0\end{cases}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0\end{cases}$$
Следователно $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не съществува и функцията $f(x)=|x|$ не е диференцуема в точката $x_0=0$. Ще отбележим обаче, че съществуват границите
$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-1,\quad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta f}{\Delta x}=1,$$
които можем да разглеждаме съответно като лява и дясна производни на функцията $f(x)=|x|$ в точката $x_0=0$.

5. Геометричен смисъл на производна. Лява и дясна производни

От формула (1) и определението за производна следва, че ъгловият коефициент $k = \operatorname{tg}\alpha_0$ на допирателната към графиката на функцията f в точка $M_0(x_0, f(x_0))$ е равен на $f'(x_0)$:

$$k = \operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0). \tag{7}$$

Тогава допирателната през точка $M_0(x_0, f(x_0))$ има уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{8}$$

или

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

където $y_0 = f(x_0),\ k = f'(x_0)$.

<u>Пример</u>: Да се намери уравнението на допирателната към графиката на функцията $y = \ln x$ в точка $M_0(1, 0)$.

Имаме, че $x_0 = 1,\ y_0 = \ln x_0 = \ln 1 = 0$,

$$y' = \frac{1}{x},\ k = y'(x_0) = y'(1) = 1\,.$$

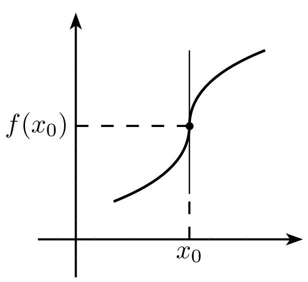
Следователно допирателната има уравнение $y - 0 = 1\cdot(x - 1)$, т.е.

$$y = x - 1\,.$$

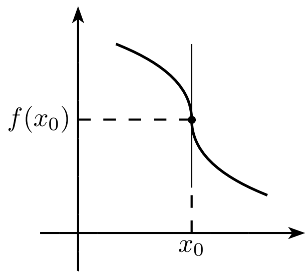
Ако производната $f'(x_0)$ не съществува, но съществуват границите

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0^-), \qquad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0^+),$$

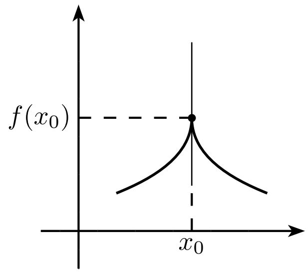
то те се наричат съответно **лява производна** и **дясна производна** на функцията $f(x)$ в точката x_0.



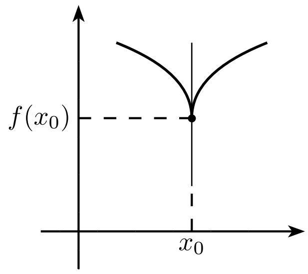
$f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = +\infty$



$f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = -\infty$



$f'(x_0^-) = +\infty,\ f'(x_0^+) = -\infty$



$f'(x_0^-) = -\infty,\ f'(x_0^+) = +\infty$

Ако тези производни съществуват и са крайни, то те задават ъгловите коефициенти на допирателните в точката $(x_0, f(x_0))$, прекарани съответно към лявата $(x \le x_0)$ и дясната $(x \ge x_0)$ части на графиката Γ_f (Фиг.()).

Ако лявата и дясна производни на функцията $f(x)$ в точката x_0 съществуват и са безкрайни, то в точката $(x_0, f(x_0))$ има вертикална допирателна към графиката Γ_f (Фиг.()).

<u>Пример</u>: Графиката на функцията $f(x) = \sqrt[3]{x}$ има вертикална допирателна в точката $(0, 0)$. Наистина $x_0 = 0,\ f(x_0) = 0$,

$$\Delta f = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{\Delta x})^2}$$

и

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{\Delta x})^2} = +\infty.$$

6. Механичен смисъл на производна

От формула (2) и определението за производна следва, че ако при праволинейно движение, пътят S, изминат за време t, се определя с функцията $S = S(t)$, то скоростта на движение $v(t)$ в момент t е равна на

$$v(t) = S'(t). \tag{9}$$

Ще отбележим, че ускорението $w(t)$ при това движение се определя с границата

$$w(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

т.е.

$$w(t) = v'(t). \tag{10}$$

7. Теореми за пресмятане на производни

Както се вижда от посочените по-горе примери, намирането на производните по общата схема не е лесно. За да облекчим тази операция, ще формулираме някои общи теореми за диференциране (правила за диференциране) и ще намерим производните на познатите ни елементарни функции (таблица с производните). Тогава, като следваме тези правила и използваме таблицата, ще можем да намираме по-лесно производните на по-сложни функции.

Теорема 2. (*Производна на сума*)

$$(u + v)' = u' + v'. \tag{11}$$

Следствие:

$$(u + c)' = u'.$$

Обобщение:

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)' = u_1' + u_2' + \cdots + u_n'.$$

Теорема 3. (*Производна на произведение*)

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{12}$$

Следствие:

$$(cu)' = cu'.$$

Обобщение:

$$\begin{aligned}(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n \\ + u_1 u_2' \cdots u_n \\ + \cdots\cdots\cdots \\ + u_1 u_2 \cdots u_n'.\end{aligned} \tag{13}$$

Като следствие на горните две теореми, заключаваме, че диференцирането има свойството **линейност**:

$$(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n)' = c_1u_1' + c_2u_2' + \cdots + c_nu_n'. \tag{14}$$

Теорема 4. (*Производна на частно*)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\,. \tag{15}$$

Пример: $y = 3x - 4\ln x + 5, \quad y' =?$
Като приложим формула (14) получаваме

$$y' = 3(x)' - 4(\ln x)' + (5)' = 3\cdot 1 - 4\cdot\frac{1}{x} + 0 = 3 - \frac{4}{x}\,.$$

Пример: $y = x\ln x, \quad y' =?$
Като приложим формула (12) получаваме

$$y' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Пример: $y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad y' =?$
Като приложим формула (15) получаваме

$$y' = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x\cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Пример: $y = x^n,\ (n \in N) \quad y' =?$
Като приложим формула (13) получаваме

$$\begin{aligned}y' = (x)'\cdot x\cdots x \\ + x\cdot(x)'\cdots x \\ + \cdots\cdots\cdots \\ + x\cdot x\cdots(x)' = nx^{n-1},\end{aligned}$$

с което доказахме, че

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{16}$$

Теорема 5. (*Производна на съставна функция*) *Нека функциите $u = u(x)$ и $y = y(u)$ образуват съставната функция $y = y[u(x)]$. Тогава*

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'. \tag{17}$$

Обобщение: Нека

$$y = y(\alpha(\beta(\cdots\omega(x)))).$$

Тогава е в сила **„верижното правило"**

$$y_x' = y_\alpha' \cdot \alpha_\beta' \cdots \omega_x'. \tag{18}$$

Коментар:

Пример: $y = [\ln(x^2+x)]^4, \quad y' = ?$
Като приложим формула (17) получаваме

$$\begin{aligned} y' &= 4[\ln(x^2+x)]^3[\ln(x^2+x)]' \\ &= 4[\ln(x^2+x)]^3\frac{1}{x^2+x}(x^2+x)' \\ &= 4[\ln(x^2+x)]^3\frac{1}{x^2+x}(2x+1). \end{aligned}$$

Теорема 6. (*Производна на обратна функция*) *Нека функциите $y = y(x)$ и $x = x(y)$ са взаимнообратни. Тогава*

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}\,. \tag{19}$$

Пример: $y = e^x, \quad y' = ?$
Тогава $x = \ln y$ и като приложим формула (19) получаваме

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x,$$

с което доказахме, че

$$(e^x)' = e^x. \tag{20}$$

Пример: $y = \sqrt{x}, \quad y' = ?$
Тогава $x = y^2$ и като приложим формула (19) получаваме

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

с което доказахме, че

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,. \tag{21}$$

Пример: $y = \arcsin x, \quad y' = ?$
Тогава $x = \sin y$ и като приложим формула (19) получаваме

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

с което доказахме, че

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in (-1,1). \tag{22}$$

Аналогично се доказват формулите:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in (-1,1). \tag{23}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,, \tag{24}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\,. \tag{25}$$

Теорема 7. (*Логаритмична производна*) *Нека $y = y(x)$. Тогава*

$$y' = y\big(\ln y\big)'. \tag{26}$$

Забележка: Формула (26) е удобно да се прилага, когато функцията $y(x)$ е произведение и/или частно на няколко степенни или показателни функции.
Пример: $y = x^\alpha$, (α – произволно) $\quad y' = ?$
Тогава $\ln y = \alpha \ln x$ и като приложим формула (26) получаваме

$$y' = y(\ln y)' = x^\alpha(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

с което доказахме, че при всяко $\alpha = const$.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{27}$$

Пример: $y = \dfrac{x^2 e^{5x}}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt[4]{x-1}}\,, \quad y' = ?$
Тогава

$$\ln y = 2\ln x + 5x - \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x-1)$$

и като приложим формула (26) получаваме

$$y' = \frac{x^2 e^{5x}}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt[4]{x-1}}\left(\frac{2}{x} + 5 - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)}\right).$$

8. Правила за диференциране. Таблица с производните

Правила за диференциране:

1. $(u+v)' = u' + v'$.
2. $(uv)' = u'v + uv'$.
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.
5. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.
6. $y' = y\big(\ln y\big)'$.

Таблица с производните:

1. $(c)' = 0$.
2. $(x)' = 1$.
3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

   Частни случаи:

   $(x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2,\ (x^4)' = 4x^3.$

   $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ \ ,\Big(\dfrac{1}{x}\Big)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.
6. $(e^x)' = e^x$.
7. $(a^x)' = a^x \ln a$.
8. $(\sin x)' = \cos x$.
9. $(\cos x)' = -\sin x$.
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
11. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
15. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

9. Диференциал

Нека функцията $f(x)$ е диференцуема в точката $x_0 \in (a,b)$.

$dx = \Delta x = x - x_0$

– диференциал на x в точка x_0;

$df = df(x_0) = f'(x_0)dx$

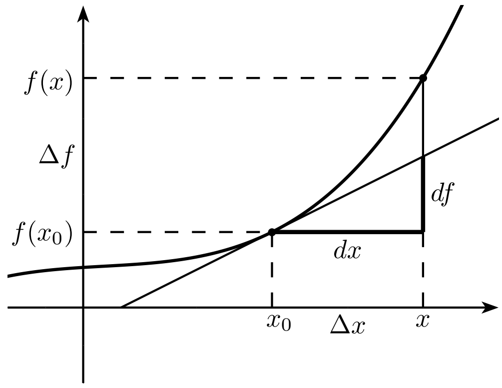
– диференциал на f в точка x_0;

$df(x) = f'(x)dx$

– диференциал на f в точка x.

Означение: $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

Геометрично тълкуване:



Правила:

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(u+c) = du;$$

$$d(uv) = udv + vdu, \quad d(cu) = cdu.$$

Примери:

$$\begin{aligned} &d\,e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}\,dx\,, \\ &d\,\sin\beta x = \beta\cos\beta x\,dx\,, \\ &d\,\cos\beta x = -\beta\sin\beta x\,dx\,, \\ &d\,x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^\alpha\,dx\,, \\ &d\,\ln x = \frac{1}{x}\,dx\,. \end{aligned} \tag{28}$$

10. Производни от по-висок ред

$$f(x) \to f'(x) \to f''(x) \to \cdots f^{(n)}(x)$$

Означения: $f'' = f^{(2)},\ f''' = f^{(3)},\ f = f^{(0)}$

Пример: $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x\,,$$

$$f''(x) = (\cos x)' = -\sin x\,,$$

$$f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x\,,$$

$$f^{iv}(x) = (-\cos x)' = \sin x\,.$$

Пример: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x\,,\ f''(x) = e^x\,, \dots, f^{(n)}(x) = e^x.$$

Правила:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}. \qquad (29)$$

(формула на Лайбниц, 1646–1716)

Числата $\binom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ се наричат **биномни коефициенти**, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Пример: $y = (x^2 - x + 2)e^x, \quad y^{(10)} =?$

Полагаме $u = x^2 - x + 2,\ v = e^x$. Тогава

$v^{(k)} = e^x,\ k = 0, 1, \dots, 10,$

$u^{(1)} = 2x - 1,\ u^{(2)} = 2,$
$u^{(3)} = u^{(4)} = \dots = u^{(10)} = 0\,,$

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= \tbinom{10}{0} u^{(0)} v^{(10)} + \tbinom{10}{1} u^{(1)} v^{(9)} + \tbinom{10}{2} u^{(2)} v^{(8)} \\ &\quad + \tbinom{10}{3} u^{(3)} v^{(7)} + \cdots \\ &= [u + \frac{10}{1} u' + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} u'']e^x \\ &= [x^2 - x + 2 + 10(2x - 1) + 45 \cdot 2]e^x \\ &= [x^2 + 19x + 82]e^x\,. \end{aligned}$$