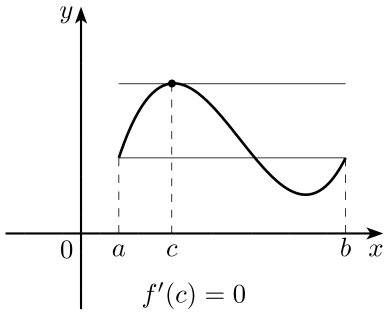
10 Основни теореми на диференциалното смятане

1. Теорема на Рол (1652–1719)

Теорема 1. *Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията:*
• *Непрекъсната е в затворения интервал $[a,b]$;*
• *Диференцуема е в отворения интервал (a,b);*
• $f(a)=f(b)$.
Тогава съществува $c\in(a,b)$ такова, че

$$f'(c)=0\,.$$

Геометрично тълкуване:

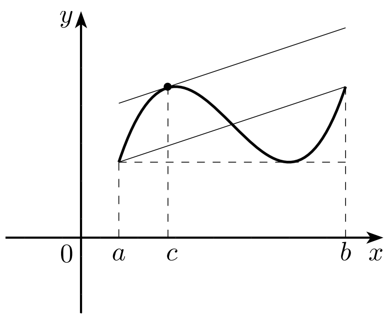


2. Теорема на Лагрàнж (1736–1813)

Теорема 2. *Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията:*
• *Непрекъсната е в затворения интервал $[a,b]$;*
• *Диференцуема е в отворения интервал (a,b).*
Тогава съществува $c\in(a,b)$ такова, че

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\,. \qquad (1)$$

Геометрично тълкуване:



Формула (1) се записва още във вида

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), \qquad c\in(a,b)\,. \qquad (2)$$

и се нарича още **теорема за средната стойност** или **теорема за крайните нараствания**.

Следствие 1.

$$f(x)=c,\ x\in(a,b)\Leftrightarrow f'(x)=0,\ x\in(a,b)$$

1. Нека $f(x)\equiv c\Rightarrow f'(x)\equiv 0$.
2. Нека $f'(x)=0,\ x\in(a,b)$.
Фиксираме $x_0\in(a,b)$. Тогава

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0), \quad c\in(x_0,x)\,,$$

откъдето следва, че

$$f(x)=f(x_0), \quad \forall x\in(a,b)\,.$$

Следствие 2.

$$f(x)=g(x)+c,\ x\in(a,b)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f'(x)=g'(x),\ x\in(a,b)$$

Наистина,

$$f(x)\equiv g(x)+c\Leftrightarrow f(x)-g(x)\equiv c$$
$$\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)\equiv 0\Leftrightarrow f'(x)\equiv g'(x).$$

Това следствие се нарича още **основна теорема на интегралното смятане**.

Пример: $\sin^2 x+\cos^2 x=1, \quad x\in R.$

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x\,,$$
$$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x+2\cos x\cdot(-\sin x)\equiv 0\,,$$
$$\Rightarrow f(x)\equiv c, \quad f(0)=1\Rightarrow c=1\,.$$

Пример: $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}, \quad x\in[-1,1].$

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x\,,$$
$$f'(x)\equiv 0,\ x\in(-1,1)\Rightarrow f(x)\equiv c,\ x\in(-1,1)\,,$$
$$f(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$
$$f(x)\equiv\frac{\pi}{2}, \quad x\in(-1,1)\,.$$

Освен това,

$$f(1)=\arcsin(1)+\arccos(1)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}\,,$$
$$f(-1)=\arcsin(-1)+\arccos(-1)$$
$$=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}\,.$$

3. Теорема на Кошѝ (1798–1857)

Теорема 3. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяват условията:*

- *Непрекъснати са в затворения интервал $[a, b]$;*
- *Диференцуеми са в отворения интервал (a, b).*
- $g'(x) \neq 0, \quad x \in (a, b)$.

Тогава съществува $c \in (a, b)$ такова, че

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

4. Неопределени форми. Правила на Лопитàл (1661–1704)

Функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е **неопределена форма от вида** $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ **при** $x \to a$, ако

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Аналогично се определят неопределените форми от вида

$\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ – за функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$,

$[0 \cdot \infty]$ – за функцията $f(x)g(x)$,

$[\infty - \infty]$ – за функцията $f(x) - g(x)$,

$\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$ – за функцията $f(x)^{g(x)}$.

Правила на Лопитал:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{5}$$

Тези правила са в сила и за границите:

$$\lim_{x \to a^+} \quad \lim_{x \to a^-} \quad \lim_{x \to +\infty} \quad \lim_{x \to -\infty}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \\ &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Обобщение: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \forall \alpha$.

Пример: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha - 1}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

За да се приложи някое от правилата на Лопитал (4) или (5), се правят следните преобразования:

$$f(x)g(x) = [0 \cdot \infty] = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f(x)g(x) = [0 \cdot \infty] = \frac{g(x)}{1/f(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$f(x) - g(x) = [\infty - \infty] = \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/g(x) \cdot 1/f(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Ако $u(x) = f(x)^{g(x)}$ е неопределена форма от вида $\left[0^0\right], \left[\infty^0\right], \left[1^\infty\right]$, то преминаваме към неопределена форма от вида $[0 \cdot \infty]$ след предварително логаритмуване:

$$\begin{aligned} \ln u(x) = g(x) \ln f(x) &= [0 \cdot \infty], \quad \text{за } \left[0^0\right], \\ &= [0 \cdot \infty], \quad \text{за } \left[\infty^0\right], \\ &= [\infty \cdot 0], \quad \text{за } \left[1^\infty\right]. \end{aligned}$$

5. Формули на Тѐйлър и Маклòрен

Нека
$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3$.

$$p(x_0) = a_0,$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2,$$

$$p'(x_0) = a_1,$$

$$p''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0),$$

$$p''(x_0) = 2a_2,$$

$$p'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3.$$

Тогава

$$a_0 = p(x_0), \quad a_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}\,,$$
$$a_2 = \frac{p''(x_0)}{2!}\,,\ a_3 = \frac{p'''(x_0)}{3!}\,.$$

и

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{p'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Ако полиномът $p(x)$ е от степен n, то аналогично се получава следната **формула на Тейлър за полиноми**:

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \cdots \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,, \tag{6}$$

т.е. един полином $p(x)$ от степен n напълно се определя от $p(x_0), p'(x_0), \ldots, p^{(n)}(x_0)$.

Нека функцията $f(x)$ е $n+1$–пъти диференцуема в околност на точката x_0. Тогава е с сила следната **формула на Тейлър** (1685–1731):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n\,, \tag{7}$$

където

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \theta \in (x_0, x)$$

се нарича **остатъчен член**.

Коментар:

При $x_0 = 0$ получаваме следната **формула на Маклорен** (1698–1746):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n\,, \tag{8}$$

където

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1\,.$$

Приложение: За приблизително пресмятане на стойностите на $f(x)$.

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{9}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{10}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{11}$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \tag{12}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}\,, \quad \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}\,. \tag{13}$$