12 Неопределен интеграл

1. Понятие за неопределен интеграл

Нека функцията $f(x)$ е определена в интервала (a,b), а $F(x)$ е диференцуема в (a,b).

Определение 1. *Функцията $F(x)$ се нарича* **първообразна (примитивна)** *на функцията $f(x)$ в интервала (a,b), ако*
$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a,b).$$

Пример: Функциите
$F(x) = \frac{1}{3}x^3, F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2, F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$
са първообразни на функцията $f(x) = x^2$.

Извод: Ако $F(x)$ е първообразна на $f(x)$ в интервала (a,b), то всички първообразни на $f(x)$ в този интервал са функциите от вида $\Phi(x) = F(x) + C$, където C е произволна константа.

Определение 2. *Множеството от всички първообразни $\Phi(x) = F(x) + C$ на функцията $f(x)$ в интервала (a,b) се нарича* **неопределен интеграл** *от функцията $f(x)$ в интервала (a,b) и се означава*
$$\int f(x)dx = F(x) + C\,.$$

Термини: интегрален знак, подинтегрален израз, подинтегрална функция, интегриране.
Примери:
$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \int \cos x dx = \sin x + C.$$

2. Основни свойства на неопределените интеграли

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx;$
5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$
6. Ако $\int f(x)dx = F(x) + C$

и функцията $u(x)$ е диференцуема, то
$$\int f[u(x)]du(x) = F[u(x)] + C\,.$$

3. Таблица на основните неопределени интеграли

1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$
   $\int du = u + C;$
   $\int udu = \frac{u^2}{2} + C;$
   $\int u^2du = \frac{u^3}{3} + C;$
   $\int u^3du = \frac{u^4}{4} + C;$
   $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$
   $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C;$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad (u \neq 0);$
3. $\int e^u du = e^u + C;$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1);$
5. $\int \cos u du = \sin u + C;$
6. $\int \sin u du = -\cos u + C;$
7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad (u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z);$
8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{cotg} u + C \quad (u \neq k\pi,\ k \in Z);$
9. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C, \\ -\arccos u + C, \end{cases} \quad (|u| < 1);$
10. $\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} u + C, \\ -\operatorname{arccotg} u + C; \end{cases}$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0);$
12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \ (a > 0,\ u \neq \pm a);$
13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C \quad (a > 0);$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C \quad (a > 0,\ |u| < a).$

Забележка: Интегралите $1 - 10$ се получават като следствие от таблицата с производните.

Интегралите $11-14$ ще бъдат пресметнати подолу, но верността на формулите може да се провери непосредствено, като се диференцират функциите в десните им части и се сравнят със съответните подинтегрални функции в левите части.

4. Основни методи за интегриране

а) Интегриране чрез разлагане

Използват се свойствата 4 и 5 (линейност)

Пример:

$$\int (x^3-5x+2)dx = \int x^3dx - 5\int xdx + 2\int dx = \frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^2}{2} + 2x + C.$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \Big(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\Big)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$$

б) Интегриране чрез внасяне на функция под знака на диференциала (свойство 6)

$$\boxed{dx = d(x+b), \quad dx = \frac{1}{a}d(ax)}$$

Пример:

$$\int \sqrt{x+5}\,dx = \int (x+5)^{\frac12}d(x+5). = \frac{(x+5)^{\frac12+1}}{\frac12+1} + C = \frac23(x+5)^{\frac32} + C.$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

Пример:

$$\int \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int \cos\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2} + C.$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

С това доказахме формула 13 от таблицата. Формула 14 се доказва аналогично. Докажете!

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{x+a-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx = \frac{1}{2a}\int \Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big)dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big| + C.$$

Пример:

$$\int \cos^2 xdx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac12\int dx + \frac{1}{2\cdot 2}\int \cos 2xd2x = \frac{x}{2} + \frac14\sin 2x + C.$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{9x^2+6x+2} = \int \frac{dx}{(3x+1)^2+1} = \frac13\int \frac{d(3x+1)}{1+(3x+1)^2} = \frac13\operatorname{arctg}(3x+1) + C.$$

$$\boxed{x^n dx = \frac{1}{n+1}dx^{n+1} \quad (n\neq -1)}$$

Пример:

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac12\int \frac{dx^2}{x^2+1} = \frac12\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac12\ln(x^2+1) + C.$$

Пример:

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+1} = ?$$

$$\boxed{\frac1x dx = d\ln|x|}$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(|\ln x|) + C.$$

$$\boxed{e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}de^{\alpha x}}$$

Пример:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{d(e^x+1)}{\sqrt{e^x+1}} = 2\sqrt{e^x+1} + C.$$

$$\boxed{\cos\beta x dx = \frac{1}{\beta} d\sin\beta x}$$

Пример:

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

$$\boxed{\sin\beta x dx = -\frac{1}{\beta} d\cos\beta x}$$

Пример:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

$$\boxed{\frac{dx}{\cos^2 x} = d\operatorname{tg} x, \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d\operatorname{cotg} x}$$

Пример:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^4 x d\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

$$\boxed{\frac{dx}{1+x^2} = d\operatorname{arctg} x, \quad \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} d\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}$$

Пример:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x d\operatorname{arctg} x$$
$$= \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C.$$

в) Интегриране чрез полагане (субституция)

$$\int f(x)dx = [x = \varphi(t),\ t = \psi(x)]$$
$$= \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \underbrace{\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}_{\text{известен}}$$
$$= G(t) + C = G[\psi(x)] + C.$$

Пример:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x(1+\sqrt[3]{x})} =$$

$$[x = t^6,\ dx = 6t^5dt,\ \sqrt{x} = t^3,\ \sqrt[3]{x} = t^2,\ t = \sqrt[6]{x}]$$

$$= \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^6(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2dt}{1+t^2}$$
$$= 6\int \frac{(t^2+1-1)dt}{1+t^2}$$
$$= 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 6[t - \operatorname{arctg} t] + C$$
$$= 6[\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}] + C.$$

г) Интегриране по части

$$d[u(x)v(x)] = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$$
$$u(x)dv(x) = d[u(x)v(x)] - v(x)du(x)$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \quad (1)$$

Формула (1) се нарича **формула за интегриране по части**.

Пример:

$$\int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int x d\ln x$$
$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C.$$

Пример:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \int \operatorname{arctg} x d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$= \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} d\operatorname{arctg} x$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C.$$

Пример:

$$\int (x^2-2x+2)e^x dx = \int (x^2-2x+2)de^x$$
$$= (x^2-2x+2)e^x - \int e^x(2x-2)dx$$
$$= (x^2-2x+2)e^x - \int (2x-2)de^x$$
$$= (x^2-2x+2)e^x - [(2x-2)e^x - \int e^x 2dx]$$
$$= (x^2-2x+2)e^x - (2x-2)e^x + 2e^x + C$$
$$= (x^2-4x+6)e^x + C.$$

Препоръки: Интеграли от вида

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx, \int P_n(x)\cos\beta x dx, \int P_n(x)\sin\beta x dx$$

се интегрират n пъти по части, като предварително всеки път под знака на диференциала се внасят функциите $e^{\alpha x}, \cos\beta x, \sin\beta x$.

Интеграли от вида

$$\int P_n(x)\ln x dx, \ \int P_n(x)\operatorname{arctg} x dx$$

се интегрират един път по части, като предварително под знака на диференциала се внася полиномът $P_n(x)$.

5. Интегриране на рационални функции

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx = ?$$

Ако $m \geq n$, то след деление получаваме
$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = g(x) + \frac{r_v(x)}{P_n(x)},$$
където $g(x)$ е полином от степен $m-n$ и $v < n$. Известно е как се пресмята $\int g(x)dx$.

Нека $m < n$ и
$P_n(x) = (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^s \cdots$
Тогава

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \cdots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{N_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s} + \cdots$$

При $k = 1$
$$\int \frac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a| + C.$$

При $k > 1$
$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

$$\int \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}dx = ?$$

Понеже уравнението
$x^2+px+q = 0$
има комплексно-спрегнати корени
$x = x_1 = \alpha+\beta i, x = x_2 = \alpha - \beta i,$
то
$$x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2) = (x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i) = (x-\alpha)^2+\beta^2.$$
Полагаме
$x = \beta t + \alpha \Rightarrow dx = \beta dt,$
$(x-\alpha)^2 = \beta^2 t^2, (x-\alpha)^2+\beta^2 = \beta^2(t^2+1).$
Тогава

$$\int \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}dx = \int \frac{M_s(\beta t+\alpha)+N_s}{\beta^{2s}(t^2+1)^s}\beta dt = c_1\int \frac{tdt}{(t^2+1)^s} + c_2\int \frac{dt}{(t^2+1)^s}.$$

$$\int \frac{tdt}{(t^2+1)^s} = \frac{1}{2}\int (t^2+1)^{-s}d(t^2+1)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(t^2+1)^{-s+1}}{-s+1} + C, \quad \text{при } s > 1,$$
$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C, \quad \text{при } s = 1.$$

$$I_s = \int \frac{dt}{(t^2+1)^s} = ?$$

$$I_s = \frac{t}{(2s-2)(t^2+1)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2s-2}I_{s-1}. \qquad (2)$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C,$$
$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

<u>Пример</u>:

$$I = \int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx = ?$$

$$\begin{array}{rl} 5x^3+9x^2-22x-8 & |\ x^3-4x \\ - \ 5x^3-20x & \ \ 5 \\ \hline 9x^2-2x-8 & \end{array}$$

$$I = \int \left(5 + \frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\right)dx,$$
$$x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2),$$
$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2},$$
$$A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2) = 9x^2-2x-8,$$

$x = 0 \quad \Rightarrow -4A = -8 \Rightarrow A = 2;$
$x = 2 \quad \Rightarrow 8B = 24 \Rightarrow B = 3;$
$x = -2 \ \Rightarrow 8B = 32 \Rightarrow C = 4;$

$$I = \int \left(5 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2}\right)dx = 5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C.$$