13 Определен интеграл

1. Определение

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал (α, β) и $a, b \in (\alpha, \beta)$.

Нека $F(x)$ е първообразна на $f(x)$ в интервала (α, β) .

Определение 1. ***Определен интеграл***

$$\int_a^b f(x)dx$$

от функцията $f(x)$ ***в интервала*** $[a, b]$ *се нарича числото, получено по формулата*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

(*Формула на Нютон – Лайбниц*)

a, b – долна и горна граница на интегриране

$[a, b]$ – интервал на интегриране (интеграционен интервал)

Определеният интеграл е число!!!

За да се пресметне определен интеграл трябва първо да се пресметне съответния неопределен интеграл!

Пример: $\displaystyle\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$

Пример: $\displaystyle\int_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a.$

Теорема 1. *Определеният интеграл от непрекъсната функция не зависи от избора на първообразната функция.*

Нека $\Phi(x)$ е произволна първообразна на $f(x)$. Тогава $\Phi(x) = F(x) + C$ и

$$\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C]$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Определен интеграл с променлива горна граница

Да разгледаме интеграла

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Имаме, че

$$G'(x) = F'(x) = f(x).$$

Следователно $G(x)$ е първообразна на $f(x)$ и

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C, \qquad (2)$$

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \qquad (3)$$

Аналогично

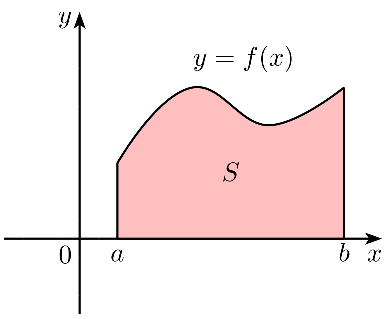
$$\left(\int_x^b f(t)dt\right)' = -f(x). \qquad (4)$$

3. Геометричен смисъл на определен интеграл

Нека $f(x)$ е непрекъсната и неотрицателна в интервала $[a, b]$ и $a \le b$.

Криволинеен трапец се нарича множеството

$$\{(x, y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}.$$



Лицето S на криволинейния трапец е равно на

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (5)$$

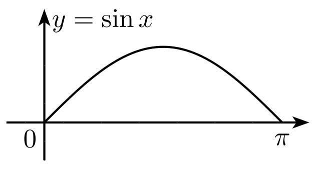
Забележка: Ако $f(x) \le 0$ при $a \le x \le b$, то лицето на криволинейния трапец

$$\{(x, y) : a \le x \le b, f(x) \le y \le 0\}$$

е равно на

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Пример: $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$.

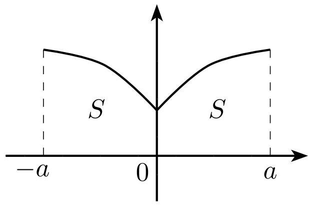


$$S = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$$

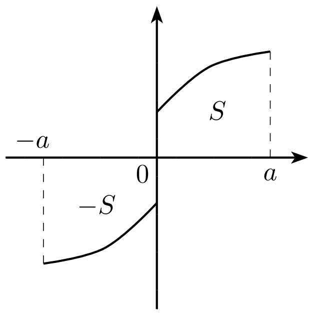
Забележка: Интеграли от четна и нечетна функция в симетричен интервал:

а) $f(x)$ е четна



$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

б) $f(x)$ е нечетна



$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

4. Основни свойства на определения интеграл

1. Стойността на определения интеграл не зависи от означението на независимата променлива:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$

където $a, b, c \in (\alpha, \beta)$ (адитивност).

5. $\displaystyle\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$
6. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

7. Ако $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0, \quad \text{ако } a \leq b.$$

8. Ако $f(x) \leq g(x)$ и $a \leq b$, то
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

9. Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$. Тогава
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$
където $c \in (a, b)$.

(Теорема за средната стойност)

5. Интегриране по части при определен интеграл

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \quad (6)$$

Пример:
$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 xde^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$
$$= e - 0 - e^x\Big|_0^1 = e - e + e^0 = 1.$$

Пример:
$$\int_0^\pi x\sin x dx = -\int_0^\pi xd\cos x$$
$$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx$$
$$= -\pi\cos\pi + 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

6. Смяна на променливата при определен интеграл

Теорема 2. *Нека са изпълнени следните условия:*
1. $f(x)$ *е непрекъсната в* $[a, b]$.
2. $\varphi(t)$ *е диференцуема при* $t \in [\alpha, \beta]$ *и* $\varphi(t) \in [a, b]$ *при* $t \in [\alpha, \beta]$.
3. $\varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b$.
4. $\varphi'(t)$ *е непрекъсната в* $[\alpha, \beta]$.

Тогава
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (7)$$

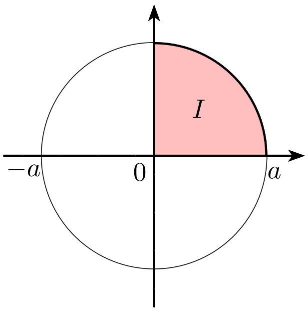
Забележка: След пресмятането на новия интеграл в (7) не се налага да се връщаме към старата променлива.

Пример:
$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$
$$= [x = a\sin t, \ dx = a\cos t dt,$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t,$$
$$x = 0 \Rightarrow t = 0, x = a \Rightarrow t = \tfrac{\pi}{2}]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt = a^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$I = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Геометрично тълкуване: За кръга $x^2 + y^2 \leq a^2$

$$S = 4I = \pi a^2.$$



Забележка: В горния пример използвахме формулата на Ва̀лис (Уо̀лис) за пресмятане на интегралите
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 1}, & n\text{-нечетно}, \\ \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}, & n\text{-четно}. \end{cases} \tag{8}$$

Примери:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{8}{15},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{5\pi}{32}.$$

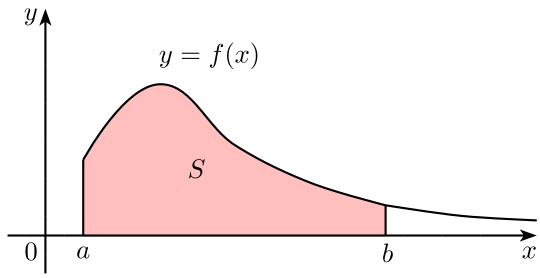
7. Несобствени интеграли

Нека $f(x)$ има първообразна $F(x)$ в интервала $[a, +\infty)$.

Несобствен интеграл от функцията $f(x)$ **в интервала** $[a, +\infty)$ се нарича числото, получено по формулата

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Геометрично тълкуване:



Като отчетем, че $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, получаваме

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

Забележка: Формулата се прилага както формулата на Нютон – Лайбниц с тази разлика, че вместо пресмятането на стойността на $F(x)$ в горната интеграционна граница $+\infty$ се търси $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

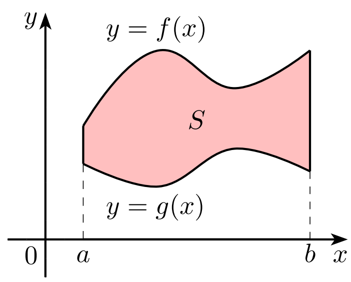
Пример:
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$$
$$= -\lim_{x \to +\infty} e^{-x} + e^{-0} = -0 + 1 = 1.$$

8. Приложения на определен интеграл

а) Пресмятане на лице

Нека $g(x) \leq f(x),\ x \in [a, b]$. Тогава лицето S на криволинейния трапец

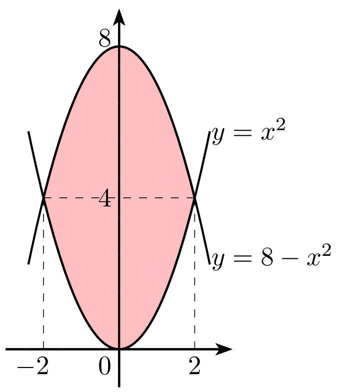
$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$



се пресмята по формулата

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx. \tag{9}$$

Пример: Да се намери лицето S на фигурата, определена с неравенствата: $y \geq x^2,\ y \leq 8 - x^2$.



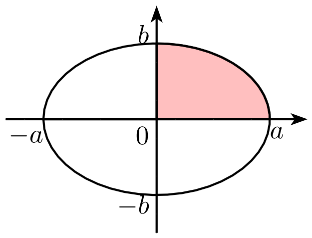
Тези неравенства са изпълнени съвместно при тези x, за които

$x^2 \le 8 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 \le 0 \Leftrightarrow$
$2(x-2)(x+2) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2.$

Тогава

$$S = \int_{-2}^{2} [8 - x^2 - x^2]dx = 2\int_0^2 [8 - 2x^2]dx$$
$$= 2\Big(\int_0^2 8dx - \int_0^2 2x^2dx\Big) = 2\Big(8x\Big|_0^2 - 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\Big)$$
$$= 2(8\cdot 2 - 2\cdot\frac{8}{3}) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}\cdot$$

Пример: Да се пресметне лицето S на фигурата, определена с неравенството $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

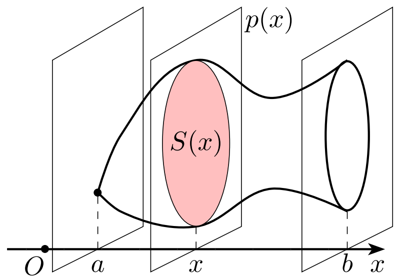


Фигурата е ограничена от елипса с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Частта от елипсата, лежаща в първи квадрант, е графика на функцията $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, $0 \le x \le a$.

Затова

$$S = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$$
$$= [x = a\sin t, dx = a\cos t dt, \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \cos t,$$
$$x = 0 \Rightarrow t = 0, x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}]$$
$$= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot a\cos t dt = 4ab\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \pi ab.$$

б) Пресмятане на обем на тяло



Нека в пространството имаме тяло, ограничено от затворена повърхнина и сме избрали ос Ox. Прекарваме равнина $p(x)$, перпендикулярна на оста и пресичаща оста в точка с координата x. Нека при $a \le x \le b$ равнината пресича тялото (Фиг.()). Полученото сечение е равнинна фигура с лице S, което зависи от x: $S = S(x)$. Когато функцията $S(x)$ е известна, можем да пресметнем обема V на тялото по формулата:

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{10}$$

Пример: Да се намери обемът на елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1.$

Елипсоидът е ограничен от повърхнина с уравнение $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2}, \quad -a \le x \le a$

или

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1, \quad -a \le x \le a.$$

Това уравнение задава в равнината Oyz елипса с полуоси

$$b(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ c(x) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Лицето на фигурата, ограничено от тази елипса, е равно на

$$S(x) = \pi b(x)c(x) = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}).$$

Тогава обемът на елипсоида е равен на

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})dx = 2\int_0^a \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})dx$$
$$2\pi bc[x\Big|_0^a - \frac{1}{a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a] = 2\pi bc[a - \frac{a^3}{3a^2}] = \frac{4}{3}\pi abc.$$

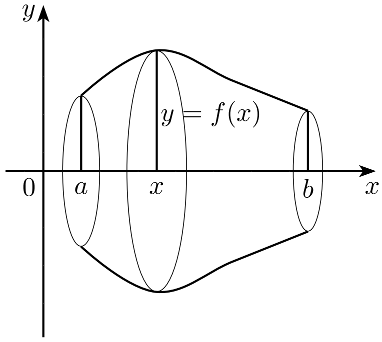
Ако имаме кълбо с радиус $R (a = b = c = R)$, то $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

в) Пресмятане на обем на ротационно тяло

Ако завъртим криволинейния трапец, определен от графиката на функцията

$y = f(x),\ a \le x \le b,$

около оста Ox, получаваме ротационно тяло (Фиг.()).



Тогава $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ и обемът на полученото ротационно тяло се пресмята по формулата

$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (11)$$

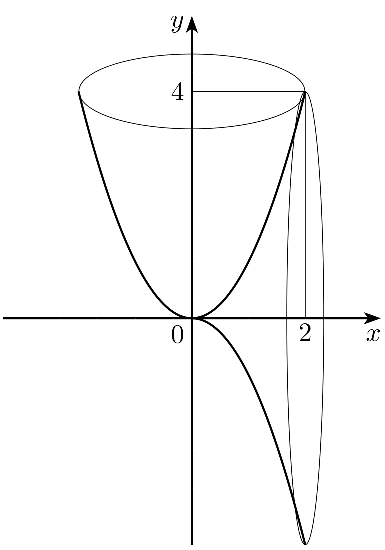
Аналогично, ако завъртим криволинейния трапец, определен от графиката на функцията

$x = g(y),\ c \le y \le d,$

около оста Oy, получаваме ротационно тяло с лице на сечението $S(y) = \pi x^2 = \pi g^2(y)$. Тогава обемът на полученото ротационно тяло се пресмята по формулата

$$V_{oy} = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d g^2(y) dy. \qquad (12)$$

Пример: Да се намери обемът на ротационното тяло, получено при въртенето на кривата $y = x^2,\ 0 \le x \le 2$ около оста Ox.



$$V_{ox} = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

Същата крива може да се зададе като графика на функцията $x = \sqrt{y},\ 0 \le y \le 4$ и тогава обемът на ротационното тяло, получено при въртенето около оста Oy, е равен на

$$V_{oy} = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$$

г) Пресмятане на дължина на дъга

Една дъга (крива) Г в пространството се задава параметрично с помощта на три функции:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Когато параметърът t пробягва интервала $[\alpha, \beta]$, точката $(x(t), y(t), z(t))$ пробягва Г.

При параметрично задаване на дъгата Г, нейната дължина L се пресмята по формулата

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \qquad (13)$$

Тук $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt},\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt},\ \dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$.

Ако дъгата е равнинна, то $z = 0$ и тогава

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \qquad (14)$$

Ако дъгата е зададена като графика на функцията $y = y(x),\ a \le x \le b$, то тогава

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \qquad (15)$$

Пример: Да се намери дължината на първата арка на циклоидата

$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi.$

Имаме, че

$\dot{x} = a(1 - \cos t),\ \dot{y} = a \sin t,$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t$

$= a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \dfrac{t}{2},$

$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2a|\sin \dfrac{t}{2}|.$

Тогава

$$L = \int_0^{2\pi} 2a|\sin \frac{t}{2}| dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\frac{t}{2}$$
$$= 4a(-\cos \frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 4a(-\cos \pi + \cos 0) = 8a.$$

д) Пресмятане на лице на ротационна повърхнина

Ако завъртим графиката на функцията

$y = f(x),\ a \le x \le b$

около оста Ox, получаваме ротационна повърхнина (околната повърхнина на съответното ротационно тяло). Нейното лице S се пресмята по формулата

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$
$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

<u>Пример</u>: Нека графиката на функцията

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},\ -R \le a \le x \le b \le R$$

е завъртяна около оста Ox. Тогава

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$
$$y'^2 = \frac{x^2}{R^2-x^2},$$
$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2}$$

и лицето S на получената ротационна повърхнина е равно на

$$S = 2\pi \int_a^b \cancel{\sqrt{R^2-x^2}} \cdot \frac{R}{\cancel{\sqrt{R^2-x^2}}}dx = 2\pi Rx\Big|_a^b$$

т.е.

$$S = 2\pi R(b-a).$$

Ако $a = -R,\ b = R$, то получената повърхнина е сфера и нейното лице е равно на

$$S = 4\pi R^2.$$