14 Обикновени диференциални уравнения

1. Основни понятия

Диференциални уравнения се наричат уравненията, в които се търси неизвестна функция на една или няколко променливи, като в тези уравнения влизат както неизвестната функция, така и нейните производни. Редът на старшата производна на неизвестната функция се нарича **ред** на уравнението.

Ако неизвестната функция, участваща в диференциалното уравнение, зависи от няколко променливи и в уравнението участват частни производни на тази функция, то такова диференциално уравнение се нарича **частно диференциално уравнение**.

Ако неизвестната функция зависи само от една променлива и в уравнението участват обикновени производни на тази функция, то такова диференциално уравнение се нарича **обикновено диференциално уравнение** (ОДУ). В най-общ вид обикновено диференциално уравнение от $n-$ти ред се записва по следния начин:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 1.$$

Пример:

$y' = 3y^{2/3}$ – уравнение от първи ред;

$y'' + y = 0$ – уравнение от втори ред;

$xy''' = y'' + x$ – уравнение от трети ред.

Когато едно ОДУ е разрешимо относно старшата производна $y^{(n)}$, то същото може да се запише в следния **нормален вид**:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Уравненията

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$
$$y'' = g(x, y, y') \tag{2}$$

са съответно ОДУ от първи и втори ред, записани в нормален вид.

Функцията $y = y(x)$ се нарича **решение на ОДУ (1) в интервала** (a, b), ако е диференцуема в интервала (a, b) и

$y'(x) \equiv f(x, y(x)) \quad \forall x \in (a, b)$.

Аналогично се дава определението за решение на ОДУ (2).

Графиката на дадено решение на ОДУ се нарича **интегрална крива** на уравнението.

Пример: Функциите $y = \cos x$ и $y = \sin x$ са решения на уравнението $y'' + y = 0$ в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Наистина, функцията $y = \cos x$ има производни $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$ и като заместим в уравнението, получаваме тъждество: $-\cos x + \cos x \equiv 0$. Аналогично се проверява, че $y = \sin x$ също е решение на това уравнение в интервала $(-\infty, +\infty)$. Проверете!

Оказва се, че функция от вида

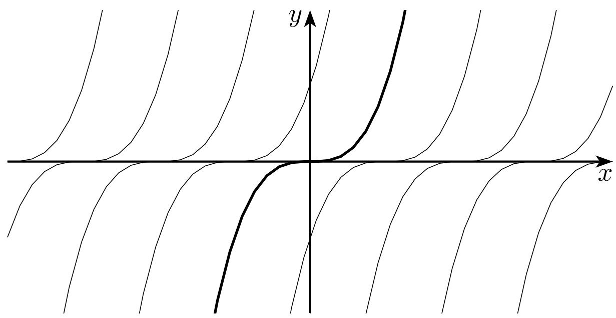
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

където c_1 и c_2 са константи, задава всички решения на уравнението и това решение се нарича **общо решение**, докато решенията $y = \cos x$ и $y = \sin x$ се наричат **частни решения**. Частните решения се получават от общото решение при подходящ избор на константите. Например $y = \cos x$ се получава при $c_1 = 1,\ c_2 = 0$, а $y = \sin x$ – при $c_1 = 0,\ c_2 = 1$.

Пример: Уравнението $y' = 3y^{2/3}$ има частно решение $y = x^3$ и общо решение $y = (x - c)^3$. Наистина, $y' = 3(x - c)^2$ и като заместим в уравнението, получаваме тъждество: $3(x - c)^2 \equiv 3[(x - c)^3]^{2/3}$.

Уравнението има още едно решение $y \equiv 0$, което се нарича **особено решение** и което не се получава от общото решение при никоя стойност на c.

Интегралните криви на уравнението са кубични параболи и правата $y = 0$.



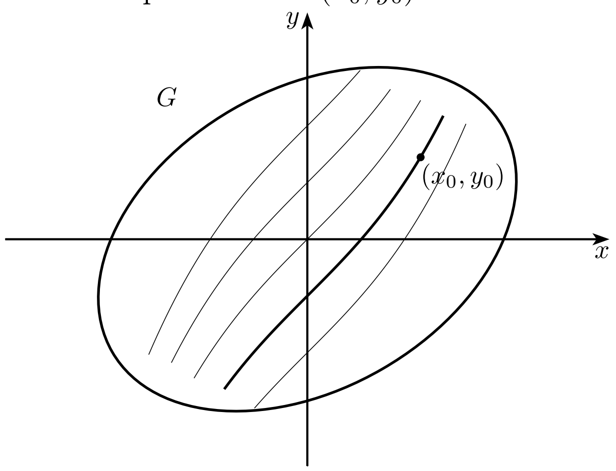
От примерите се забелязва, че дадено ОДУ има безброй много решения, като общото решение зависи от една или няколко константи. Оказва се, че броят на тези константи съвпада с реда на уравнението – за уравненията от първи ред (1) константата е една, а за уравненията от втори ред (2) константите са две.

Когато се решава ОДУ, свързано с някаква практическа задача, не се търсят всички решения, а само това решение, което удовлетворява някои предварително зададени условия, продиктувани от конкретната практическа задача. Най-често се разглежда, така наречената, начална задача. За ОДУ (1) тази задача се записва във вида

$$\left| \begin{aligned} & y' = f(x, y), \\ & y(x_0) = y_0. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

и се нарича **начална задача** (**задача на Коши**) за **началната точка** (x_0, y_0).

Решение на началната задача (3) е това решение $y = y(x)$ на ОДУ (1), което удовлетворява началното условие $y(x_0) = y_0$. На практика с решаването на началната задача (3) се намира тази интегрална крива на ОДУ (1), която минава през точката (x_0, y_0).



Нека функцията $f(x, y)$ е определена в отвореното множество $G \subset R^2$.

Възниква въпросът, винаги ли началната задача (3) за началната точка $(x_0, y_0) \in G$ има решение и ако това решение съществува, дали то е единствено? Отговор на този въпрос дава следната **теорема за съществуване и единственост на решението на началната задача**.

Теорема 1. *Нека функцията f и нейната частна производна f'_y са определени и непрекъснати в отвореното множество $D \subset R^2$ и $(x_0, y_0) \in D$.*

Тогава съществува околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на точката x_0, в която началната задача (3) има единствено решение.

Множеството $D \subsetneqq G \subset R^2$, във всяка точка (x_0, y_0) на което началната задача (3) има единствено решение, се нарича **област на единственост** за ОДУ (1), а точките от множеството D се наричат **точки на единственост**. Ако за всяка точка (x_0, y_0) на множеството $D \subset R^2$ са изпълнени условията на теорема 1, то D е област на единственост за ОДУ (1).

Пример: Функцията $f(x, y) = 3y^{2/3}$ и нейната частна производна $f'_y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ са определени и непрекъснати в равнината R^2, с изключение на точките от оста $y = 0$.
Следователно $D = \{(x, y) : y \neq 0\}$ е областта на единственост за уравнението $y' = 3y^{2/3}$.

Пример: Функцията $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ и нейната частна производна $f'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ са определени и непрекъснати в точките (x, y), за които $|y| < 1$.
Следователно $D = \{(x, y) : |y| < 1\}$ е областта на единственост за уравнението $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

2. Диференциални уравнения от първи ред с отделящи се променливи

ДУ от първи ред с отделящи се променливи имат вида

$$f_1(x)g_1(y)dy = f_2(x)g_2(y)dx. \tag{4}$$

Уравнение (4) е записано в **симетрична форма** и в него променливите x и y са равноправни, т.е. може да считаме, че неизвестната функция е $y = y(x)$ или, че неизвестната функция е $x = x(y)$.

За да се реши това уравнение, първо трябва да се отделят променливите, като се раздели почленно с $f_1(x)g_2(y)$:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

След почленно интегриране се получава, така нареченото, **решение в квадратури**:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Ако неопределените интеграли в това равенство се изразяват с елементарни функции $G(y)$ и $F(x)$, то се получава уравнение от вида

$$G(y) + F(x) = C, \tag{5}$$

което се нарича **общ интеграл**.

Ако уравнение (5) е разрешимо относно y или относно x, то **общото решение** на ОДУ (4) се получава или във вида

$$y = y(x, C),$$

или във вида

$$x = x(y, C).$$

Пример: Да се реши уравнението
$y' = \sqrt{1-y^2}$.

Записваме $\dfrac{dy}{dx}$ вместо y' и получаваме

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}.$$

Отделяме променливите:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx.$$

Интегрираме почленно

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$$

и получаваме общия интеграл

$$\arcsin y = x - C.$$

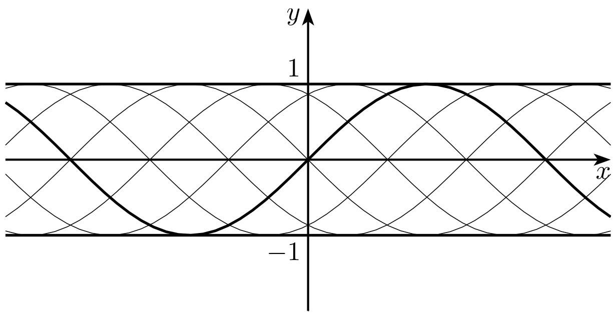
Общото решение може да се представи във вида

$$x = \arcsin y + C,$$

или във вида

$$y = \sin(x - C).$$

Понеже дефиниционната област на уравнението е множеството $\{(x, y) : |y| \le 1\}$, а областта на единственост – множеството $\{(x, y) : |y| < 1\}$, то не е трудно да се забележи, че уравнението има и две особени решения $y = 1$ и $y = -1$.



3. Линейни диференциални уравнения от първи ред

Линейните диференциални уравнения (ЛДУ) от първи ред имат вида

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{6}$$

където функцията $f(x)$ се нарича **свободен член**.

Ако $f(x) \equiv 0$, уравнение (6) се нарича **хомогенно**, а когато $f(x) \neq 0$ – **нехомогенно**. Ще отбележим, че ако функциите $p(x)$ и $f(x)$ са непрекъснати в интервала (a, b), то множеството $\{(x, y) : a < x < b\}$ е област на единственост на уравнение (6).

а) Решение на хомогенното уравнение

$$y' + p(x)y = 0. \tag{7}$$

Решаваме това уравнение, като отделим променливите:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y,$$
$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx,$$
$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|.$$

Окончателно общото решение на хомогенното ЛДУ (7) има вида

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{8}$$

б) Решение на нехомогенното уравнение

Решението на нехомогенното уравнение (6) търсим във вида

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{9}$$

За да намерим функцията $C(x)$, заместваме y в (6):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))$$

$$+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

След преобразуване получаваме уравнението

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{10}$$

Интегрираме и намираме, че

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Заместваме полученото $C(x)$ в (9) и намираме общото решение на нехомогенното уравнение:

$$y = \left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right] e^{-\int p(x)dx}. \tag{11}$$

Структура на решението:

$$y = Cy_1(x) + s(x),$$

където $Cy_1(x)$ е общото решение на хомогенното уравнение (7), а $s(x)$ е едно частно решение на нехомогенното уравнение (6).

Забележки:
- За да се определи правилно свободният член $f(x)$, трябва коефициентът пред y' в (6) да е равен на 1.
- Формула (11) не се помни лесно и не е удобна за прилагане при решаване на конкретни ЛДУ от първи ред. По-добре е да се следва разгледания по-горе ред за решаване:

  – решава се хомогенното уравнение (7);

  – по полученото решение се определя вида (9), в който се търси решението на нехомогенното уравнение;

  – написва се уравнението (10) за $C'(x)$;

  – след интегриране се намира $C(x)$;

  – полученото $C(x)$ се замества в (9) и се получава решението на нехомогенното уравнение.

Ще отбележим, че дясната част на уравнение (10) е произведение на свободния член $f(x)$ с реципрочната стойност на функцията

$$y_1(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

участваща във формулата (8) за общото решение на хомогенното уравнение.

Пример: Да се реши уравнението

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Решаваме хомогенното уравнение

$$y' + 2xy = 0,$$

като отделяме променливите и интегрираме:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy,$$

$$\frac{dy}{y} = -2xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2xdx,$$

$$\ln|y| = -x^2 + \ln|C|,$$

$$y = Ce^{-x^2}.$$

(общо решение на хомогенното уравнение)

Търсим решението на нехомогенното уравнение във вида

$$y = C(x)e^{-x^2}.$$

Уравнението за $C'(x)$ е

$$C'(x) = 2xe^{-x^2} \cdot e^{x^2}$$

или

$$C'(x) = 2x.$$

Тогава

$$C(x) = \int 2xdx = x^2 + C,$$

и

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

(общо решение на нехомогенното уравнение)

Пример: Да се реши уравнението

$$xy' - 2y = x^3 \cos x.$$

Делим на x, за да определим свободния член $f(x)$

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos x \equiv f(x).$$

Решаваме хомогенното уравнение

$$y' - \frac{2y}{x} = 0,$$

като отделяме променливите и интегрираме:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x},$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|,$$

$$y = Cx^2.$$

(общо решение на хомогенното уравнение)

Търсим решението на нехомогенното уравнение във вида

$$y = C(x)x^2.$$

Уравнението за $C'(x)$ е

$$C'(x) = \frac{x^2 \cos x}{x^2},$$

или

$$C'(x) = \cos x.$$

Тогава

$$C(x) = \int \cos x dx = \sin x + C,$$

и

$$y = (\sin x + C)x^2.$$

Пример: Да се реши уравнението

$$y' \cos x - y \sin x = 2x.$$

Делим на $\cos x$, за да определим свободния член $f(x)$

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = \frac{2x}{\cos x},$$

Решаваме хомогенното уравнение

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = 0,$$

като отделяме променливите и интегрираме:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x} y,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\sin x dx}{\cos x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x},$$

$$\ln|y| = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + \ln|C|,$$

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

(общо решение на хомогенното уравнение)

Търсим решението на нехомогенното уравнение във вида

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}.$$

Уравнението за $C'(x)$ е

$$C'(x) = \frac{2x}{\cos x} \cdot \cos x = 2x.$$

Тогава

$$C(x) = \int 2x dx = x^2 + C,$$

$$y = \frac{x^2 + C}{\cos x}.$$

4. Хомогенни линейни диференциални уравнения от втори ред

Хомогенните ЛДУ от втори ред имат вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in (a, b). \tag{12}$$

където функциите $p(x), q(x)$ и $f(x)$ са непрекъснати в интервала (a, b).

Свойство на решенията: Ако $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са решения на (12), то тяхната линейната комбинация $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ също е решение на това уравнение.

Кога $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ е общо решение на уравнение (12)?

Теорема 2. *$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ е общо решение на уравнение* (12)
$\Leftrightarrow$ $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са линейно независими
$\Leftrightarrow$ **детерминантата на Вронски**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

$\Leftrightarrow$ $W(x_0) \neq 0$ за някое $x_0 \in (a, b)$.

Пример: Да се намери общото решение на уравнението

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = 0, \quad x \neq 0,$$

ако са известни неговите частни решения $y_1(x) = x^3$ и $y_2(x) = x^4$. Проверете!!!

Детерминантата на Вронски за тези решения е

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = 4x^6 - 3x^6 = x^6 \neq 0, \ \forall x \neq 0.$$

Следователно решенията y_1 и y_2 са линейно независими в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и общото решение на уравнението има вида $y = c_1 x^3 + c_2 x^4$.

5. Нехомогенни линейни диференциални уравнения от втори ред

Нехомогенните ЛДУ от втори ред имат вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (13)$$

където функциите $p(x), q(x)$ и $f(x)$ са непрекъснати в интервала (a, b) и свободният член $f(x) \not\equiv 0$.

Структура на решението:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + s(x),$$

където $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ е общото решение на хомогенното уравнение (12), а $s(x)$ е едно частно решение на нехомогенното уравнение (13).

Ако е известно общото решение на хомогенното уравнение (12), то нехомогенното уравнение (13) се решава, като се приложи **методът на Лагранж за вариране на константите**, който се състои в следното:

Общото решение на нехомогенното уравнение(13) се търси във вида

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \quad (14)$$

Тогава $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ се определят от системата

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{array} \right. \quad (15)$$

Понеже детерминантата на системата е равна на

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0,$$

то система (15) има единствено решение

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x).$$

Тогава

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + C_1, C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + C_2$$

и като заместим в (14), получаваме общото решение на (13).

Извод: Решението на нехомогенното ЛДУ (13) се свежда до намирането на две линейно независими решения на хомогенното ЛДУ (12).

Пример: Да се намери общото решение на уравнението

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = x^2, \quad x \neq 0.$$

От предния пример имаме, че общото решение на съответното хомогенно ЛДУ е

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^4.$$

Затова търсим общото решение на нехомогенното ЛДУ във вида

$$y = C_1(x) x^3 + C_2(x) x^4. \quad (16)$$

Тогава $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ се определят от системата

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) \cdot x^3 + C_2'(x) \cdot x^4 = 0, \\ C_1'(x) \cdot 3x^2 + C_2'(x) \cdot 4x^3 = x^2. \end{array} \right. \quad (17)$$

Понеже детерминантата на система (17) е равна на $\Delta = W(x) = x^6$ и

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^4 \\ x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = -x^6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & x^2 \end{vmatrix} = x^5,$$

то

$$C_1'(x) = -\frac{x^6}{x^6} = -1, \quad C_2'(x) = \frac{x^5}{x^6} = \frac{1}{x},$$

$$C_1(x) = -x + C_1, \quad C_2(x) = \ln|x| + C_2.$$

Заместваме в (16) и получаваме общото решение

$$y = (-x + C_1)x^3 + (\ln|x| + C_2)x^4.$$

6. Линейни диференциални уравнения от втори ред с постоянни коефициенти

Линейните ДУ от втори ред с постоянни коефициенти имат вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad x \in (a, b), \tag{18}$$

където p и q са константи, а функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала (a, b).

а) Хомогенно ЛДУ с постоянни коефициенти

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{19}$$

Търсим решението на (19) във вида $y = e^{kx}$. Тогава $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ и като заместим в (19), получаваме

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

След като разделим с e^{kx} заключаваме, че k е решение на следното **характеристично уравнение**:

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{20}$$

За корените k_1 и k_2 на характеристичното уравнение са възможни следните случаи:

Случай 1: k_1, k_2 са реални и различни.
Тогава функциите

$$y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x}$$

са линейно независими решения на хомогенното уравнение (19) и общото решение на това уравнение е

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

Случай 2: $k_1 = k_2 = k$ са реални и равни.
Тогава функциите

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}$$

са линейно независими решения на хомогенното уравнение (19) и общото решение на това уравнение е

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}.$$

Случай 3: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ са комплексно-спрегнати.
Тогава функциите

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

са линейно независими решения на хомогенното уравнение (19) и общото решение на това уравнение е

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример: Да се намери общото решение на уравнението

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Характеристичното уравнение $k^2 - k - 6 = 0$ има два различни реални корена

$$k_1 = 3,\ k_2 = -2,$$

на които съответстват две линейно независими решения

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{-2x}.$$

Тогава общото решение има вида

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}.$$

Пример: Да се намери общото решение на уравнението

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Характеристичното уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ има два равни реални корена

$$k_1 = k_2 = 2,$$

на които съответстват две линейно независими решения

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{2x}.$$

Тогава общото решение има вида

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

Пример: Да се намери общото решение на уравнението на малките колебания на махалото

$$y'' + \omega_0^2y = 0, \quad (\omega_0 > 0).$$

Характеристичното уравнение $k^2 + \omega_0^2 = 0$ има два комплексно-спрегнати корена

$$k_1 = \omega_0 i,\ k_2 = -\omega_0 i \quad (\alpha = 0,\ \beta = \omega_0),$$

на които съответстват две линейно независими решения
$y_1 = e^{0\cdot x} \cos \omega_0 x = \cos \omega_0 x,$
$y_2 = e^{0\cdot x} \sin \omega_0 x = \sin \omega_0 x.$

Тогава общото решение има вида

$$y = C_1 \cos \omega_0 x + C_2 \sin \omega_0 x.$$

б) Нехомогенно ЛДУ с постоянни коефициенти. Особени случаи

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{21}$$

Като се използва характеристичното уравнение, лесно може да се намери общото решение

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

на съответното хомогенно уравнение (19).

Тогава може да се приложи методът на Лагранж за вариране на константите и да се определи общото решение на нехомогенното уравнение (21). Това обаче е свързано с много пресмятания (решаване на система от алгебрични уравнения и интегриране).

Решаването на нехомогенното ЛДУ (21) може да се извърши само с алгебрични пресмятания, ако свободният член $f(x)$ има вида

$$f(x) = e^{\alpha x} \left[P_{m_1}(x) \cos \beta x + Q_{m_2}(x) \sin \beta x \right]. \tag{22}$$

където $P_{m_1}(x)$ и $Q_{m_2}(x)$ са полиноми съответно от степени m_1 и m_2.
Ред на действие:

1. Определяме $\alpha,\ \beta,\ m_1,\ m_2$;
2. Намираме $m = \max(m_1, m_2)$;
3. Полагаме $\mu = \alpha + \beta i$ и определяме числото r, показващо колко пъти μ се среща сред корените на характеристичното уравнение (20);
4. Търсим частно решение $s = s(x)$ на нехомогенното ЛДУ (21) във вида

$$s = x^r e^{\alpha x} \left[P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right], \tag{23}$$

където $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ са полиноми от степен m с неопределени коефициенти. Определянето на тези коефициенти става, като s се замести в уравнение (21) и се сравнят коефициентите от двете страни на полученото равенство.

След като определим $s = s(x)$, записваме общото решение на (21) във вида

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + s(x).$$

Пример: Да се намери общото решение на уравнението

$$y'' + y = 3 \sin 2x.$$

Хомогенното уравнение

$$y'' + y = 0$$

има характеристично уравнение $k^2 + 1 = 0$. Неговите корени са $k_1 = i,\ k_2 = -i$, които са комплексно-спрегнати. На тях съответстват две линейно независими решения

$$y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x.$$

Общото решение на хомогенно уравнение е

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Свободният член

$$f(x) = 3 \sin 2x = e^{0\cdot x}[0 \cdot \cos 2x + 3 \cdot \sin 2x]$$

е от вида (22) с $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ m_1 = 0, m_2 = 0$. Тогава $m = 0$, а числото $\mu = \alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i$ не се среща сред корените на характеристичното уравнение и затова $r = 0$.

Търсим частно решение на нехомогенното уравнение във вида

$$s = x^0 e^{0\cdot x}[P_0(x) \cos 2x + Q_0(x) \sin 2x],$$

т.е.

$$s = a \cos 2x + b \sin 2x.$$

Намираме

$s' = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x,$
$s'' = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x.$

Заместваме в уравнението и получаваме:

$$-4a \cos 2x - 4b \sin 2x + a \cos 2x + b \sin 2x = 3 \sin 2x$$

или

$$-3a \cos 2x - 3b \sin 2x = 3 \sin 2x.$$

Приравняваме коефициентите пред $\cos 2x$ и $\sin 2x$:
$-3a = 0,\ -3b = 3 \Rightarrow a = 0,\ b = -1 \Rightarrow$

$$s = s(x) = -\sin 2x.$$

Окончателно

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin 2x.$$

Пример: Да се намери общото решение на уравнението

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Хомогенното уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

има характеристично уравнение

$k^2 - 3k + 2 = 0.$

Неговите корени са $k_1 = 1,\ k_2 = 2$, които са реални и различни. На тях съответстват две линейно независими решения

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}.$$

Общото решение на хомогенното уравнение е

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Свободният член

$$f(x) = e^x$$

е от вида (22) с $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ m_1 = 0, m_2 = 0$. Тогава $m = 0$, а числото $\mu = \alpha + \beta i = 1 + 0i = 1$ се среща един път сред корените на характеристичното уравнение и затова $r = 1$.

Търсим частно решение на нехомогенното уравнение във вида

$$s = x^1 e^{1 \cdot x}[P_0(x) \cos 0x + Q_0(x) \sin 0x],$$

т.е.

$$s = axe^x.$$

Намираме

$$s' = ae^x + axe^x,$$
$$s'' = ae^x + ae^x + axe^x = 2ae^x + axe^x.$$

Заместваме в уравнението и получаваме:

$$2ae^x + axe^x - 3ae^x - 3axe^x + 2axe^x = e^x$$

или

$$-ae^x = e^x.$$

Следователно $a = -1$ и $s = s(x) = -xe^x$.
Окончателно

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x.$$