1 Задачи

3.1. Намерете модула и главната стойност на аргумента на комплексните числа и ги запишете в тригонометрична форма:
а) $z = 5$; б) $z = -3$; в) $z = 4i$; г) $z = 1 + i$; д) $z = \sqrt{3} + i$.

3.2. Извършете означените действия:
а) $3 - 2i - (4 - 3i)$; б) $(3 - 2i)(4 - 3i)$; в) $\dfrac{3 - 2i}{4 + 3i}$.

3.3. Пресметнете степените:
а) $(1 - i)^8$; б) $(1 - \sqrt{3}i)^6$; в) $(3 + \sqrt{3}i)^6$ г) $\dfrac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$.

3.4. Пресметнете корените:
а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt[3]{-8i}$; в) $\sqrt[6]{64}$ г)$\sqrt[4]{-4}$ д)$\sqrt[3]{i}$.

3.5. Проверете равенствата:

а) $\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^4 = -1$;
б) $\left(\dfrac{-\sqrt{3} + i}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{-\sqrt{3} - i}{2}\right)^5 = \sqrt{3}$.

3.6. Решете уравненията:
а) $z^2 + 4z + 13 = 0$; б) $z^4 + 6z^2 - 27 = 0$;
в) $2z^2 - (5 - i)z + 6 = 0$; г) $z^2 + (3 + 2i)z + 1 + 3i = 0$.

3.7. Решете уравненията:
а) $z^4 + z^2 + 1 = 0$; б) $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

3.8. Намерете частното $q(x)$ и остатъка $r(x)$ от делението на полинома $f(x)$ с полинома $p(x)$:

а) $f(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 2$, $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 2$;

б) $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3$, $p(x) = x^2 - x + 1$;

в) $f(x) = x^3 - 7x^2 - 4x + 48$ $p(x) = x + 2$.

3.9. Намерете стойностите на полинома $f(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^2$ при:
а) $x = -2$; б) $x = -4$; в) $x = 5$; г) $x = 8$.

3.10. Разложете полинома $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x$ по степените на:
а) $x - 1$; б) $x + 2$; в) $x + 3$;

3.11. Проверете, че $x = 1$ е нула на полинома $f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$ и определете нейната кратност.

3.12. Разложете на сума от елементарни дроби следните рационални дроби:

а) $\dfrac{x+3}{x(x-1)(x+2)}$; б) $\dfrac{x^2+4}{x^2(x+2)}$; в) $\dfrac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}$;
г) $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$; д) $\dfrac{x^5}{x^2+2x+1}$; е) $\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)x}$.

4.1. Пресметнете детерминантите от втори ред:

а) $\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 48 & 24 \\ 72 & 96 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

4.2. Решете системите:

а) $\left|\begin{array}{l} 15x-11y=-3, \\ -10x+7y=1; \end{array}\right.$ б) $\left|\begin{array}{l} x+0{,}9y=1, \\ 1{,}1x+y=-2. \end{array}\right.$

4.3. Пресметнете детерминантите от трети ред:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$.

4.4. Пресметнете детерминантите от трети ред, като използвате свойствата на детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 26 & 57 & 92 \\ 263 & 571 & 920 \end{vmatrix}$.

4.5. Решете уравненията:

а) $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$.

4.6. Решете системите с прилагане на формулите на Крамер:

а) $\left|\begin{array}{l} 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=11; \end{array}\right.$ б) $\left|\begin{array}{l} 2x-3y+2z=9, \\ 3x+2y-z=3, \\ -3x+3y-2z=-1. \end{array}\right.$

4.7. Решете системите по метода на Гаус:

а) $\left|\begin{array}{l} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8; \end{array}\right.$ б) $\left|\begin{array}{l} x+y-z=2, \\ -2x+y+z=3, \\ x+y+z=6; \end{array}\right.$

в) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=4, \\ 4x+2y+z=5, \\ 9x+4y+z=6; \end{array}\right.$ г) $\left|\begin{array}{l} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2. \end{array}\right.$

4.8. Пресметнете детерминантите от четвърти ред:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

5.1. Намерете точка M, която е симетрична на точка $A(5,-2)$:
а) спрямо оста Ox; б) спрямо оста Oy; в) спрямо началото точка O.

5.2. Намерете координатите на точките, които са симетрични на точката $A(-3,1,2)$ спрямо: а) координатните оси Ox, Oy, Oz; б) координатните равнини Oxy, Oyz, Ozx.

5.3. Намерете дължините на страните на триъгълника ABC, ако $A(3,2)$, $B(-1,-1)$, $C(11,-6)$.

5.4. В равнината са дадени три точки: $A(3,7)$, $B(1,3)$, $C(7,5)$. Намерете точка M, която е симетрична на точка A спрямо правата BC.

5.5. Дадени са векторите $\mathbf{a} = (2,-5,3)$ и $\mathbf{b} = (4,-3,-3)$. Намерете дължините на векторите $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$.

5.6. Даден е триъгълник с върхове: $A(3,-5)$, $B(-3,3)$, $C(-4,2)$. Намерете дължината на медианата CD, където D е средата на AB.

5.7. Докажете, че триъгълникът с върхове:
а) $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(1,7)$ е правоъгълен;
б) $A(2,-1)$, $B(4,8)$, $C(10,7)$ е тъпоъгълен.

5.8. Докажете, че четириъгълникът с върхове $A(5,2,6)$, $B(6,4,4)$, $C(4,3,2)$, $D(3,1,4)$ е квадрат.

5.9. При коя стойност на α векторите $(-2,\alpha,3)$ и $(2,\alpha,\alpha)$ са перпендикулярни?

5.10. Намерете ъгъла φ между ъглополовящите на координатните ъгли xOy и yOz.

5.11. Намерете ъгъла φ между диагонала на куб и негов ръб.

5.12. Намерете координатите на върховете на квадрат със страна 2, ако центърът му е в координатното начало и:
а) страните му са успоредни на координатните оси;
б) диагоналите лежат върху координатните оси.

5.13. Дадени са координатите на два съседни върха $A(2,3)$, $B(3,7)$ на един успоредник и пресечната точка на диагоналите му $Q(5,6)$. Намерете координатите на другите два върха.

5.14. Докажете, че четириъгълникът с върхове $A(5,2,-1)$, $B(1,-3,4)$, $C(-2,1,3)$, $D(2,6,-2)$ е успоредник.

5.15. Намерете вътрешните ъгли на триъгълника с върхове $A(1,2,1)$, $B(3,-1,7)$, $C(7,4,-2)$. Покажете, че триъгълникът е равнобедрен.

5.16. Дадени са точките: $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,2,1)$. Намерете векторните произведения:
а) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$; б) $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$.

5.17. Намерете вектор $\mathbf{a}$, който е перпендикулярен на оста Oz и на вектора $\mathbf{b} = (8,-15,3)$, образува остър ъгъл с оста Ox и има дължина $|\mathbf{a}| = 51$.

5.18. Докажете, че точките $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежат в една равнина.

5.19. Докажете, че точките $A(1,-2,2)$, B(1,4,0), $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$ лежат в една равнина и намерете ъгъла между диагоналите на четириъгълника $ABCD$.

5.20. Намерете обема на тетраедъра с върхове $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$, $D(2,3,8)$.

6.1. Намерете уравнението на правата:
а) минаваща през точка $(3,-1)$ и успоредна на ъглополовящата на първи квадрант;
б) минаваща през точка $(3,-1)$ и перпендикулярна на ъглополовящата на първи квадрант.

6.2. От пресечните точки на правата $7x+3y-21=0$ с координатните оси са прекарани перпендикуляри към тази права. Намерете техните уравнения.

6.3. Намерете точка B, симетрична на точката $A(-1,10)$ спрямо правата $x-2y+6=0$.

6.4. Дадени е триъгълник с върхове $A(2,-1)$, $B(-1,3)$, $C(4,0)$.
а) Намерете уравненията на страните му;
б) Намерете уравненията на правите, минаващи през всеки връх успоредно на противоположната страна.

6.5. През точките $(-3,-8)$ и $(6,4)$ е прекарана права. Намерете пресечните точки на тази права с координатните оси.

6.6. Дадени са уравненията на страните на триъгълника ABC:
$AB \equiv 3x+2y-8=0$, $BC \equiv 4x-y-7=0$, $CA \equiv 10x-3y+41=0$.
а) Намерете координатите на върховете A, B, C.
б) Намерете уравненията на височините.

6.7. Намерете отрезовите уравнения за правите:
а) $y=-2x+3$; б) $5x-3y-15=0$; в) $3x-2y+12=0$.

6.8. Намерете лицето на триъгълника, заключен между координатните оси и правата $-3x+2y+6=0$.

6.9. Намерете уравненията на страните на квадрата, чийто диагонали са координатните оси, ако дължината на страната на квадрата е a.

6.10. Намерете ъгловите коефициенти на правите:
а) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{7}=1$; б) $9x-7y+1=0$.

6.11. През точка $M(-1,7)$ прекарайте права, перпендикулярна на правата $y=\dfrac{2}{5}x+7$.

6.12. Намерете уравненията на катетите на правоъгълен равнобедрен триъгълник, ако уравнението на хипотенузата е $y=3x+5$ и върхът на правия ъгъл е $C(4,-1)$.

6.13. От точка $M(6,9)$ към правата $x-13y+26=0$ е насочен лъч под ъгъл $45°$. Намерете уравненията на падащия и отразения лъч.

6.14. Определете взаимното положение на правите и пресечната им точка, ако те се пресичат:

а) $3x - 6y - 9 = 0$ и $-2x + 4y + 6 = 0$; б) $3x - 6y - 9 = 0$ и $-2x + 4y + 5 = 0$;

в) $y = -\dfrac{5}{3}x + 2$ и $5x + 3y - 1 = 0$; г) $5x - 3y + 11 = 0$ и $4x + 7y - 10 = 0$.

6.15. Намерете точка върху абсцисната ос, която е равноотдалечена от координатното начало и правата $4x - 3y + 12 = 0$.

6.16. Намерете точка върху правата $x+y = 1$, която е равноотдалечена от правите $2x-9y = 1$ и $6x - 7y = 2$.

6.17. Даден е триъгълник с върхове $A(2, 1)$, $B(-13, 5)$, $C(7, 3)$. Намерете дължините на височините h_A, h_B, h_C.

6.18. Намерете разстоянието между правите $3x - 4y + 12 = 0$ и $3x - 4y - 8 = 0$.

6.19. Намерете уравненията на правите, които са успоредни на правата $3x - 4y + 12 = 0$ и отстоящи от нея на разстояние 7 единици.

6.20. Една от страните на квадрат лежи върху правата $x - 3y + 1 = 0$, а един от върховете му се намира в точка $(3, 0)$. Намерете уравненията на останалите страни на квадрата.

6.21. Как са разположени точка $A(5, 2)$ и координатното начало спрямо правата: а) $7x - 12y + 19 = 0$; б) $2x - 9y + 3 = 0$.

6.22. Пресича ли правата $5x + 4y - 20 = 0$ отсечката AB, където $A(3, 1)$, $B(6, -1)$?

6.23. Дадени са върховете $A(1, 2)$, $B(7, 4)$, $C(5, 9)$ на триъгълник. Намерете уравненията на права, минаваща през точка A и перпендикулярна на медианата, минаваща през точка C.

7.1. Намерете уравнението на окръжност с диаметър AB: $A(1, 4)$, $B(-3, 2)$.

7.2. Намерете уравнението на окръжността, която минава през точките $A(7, 7)$, $B(0, 8)$, $C(-2, 4)$.

7.3. Намерете уравненията на допирателните към окръжността
$x^2 + y^2 + 5x = 0$, перпендикулярни към правата $4x - 3y + 4 = 0$.

7.4. Намерете уравненията на допирателните към окръжността
$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, които минават през точка $M(9, 2)$.

7.5. Определете координатите на фокусите на параболата:

а) $y^2 = -8x$; б) $x^2 = 4y$.

7.6. Намерете допирателната на параболата $y^2 = 16x$, която е успоредна на правата $2x - y + 7 = 0$.

7.7. Намерете уравнението на права, която се допира до параболата $x^2 = 16y$ и е перпендикулярна на правата $2x + 4y + 7 = 0$.

7.8. Намерете каноничните уравнения на елипсата, ако:

а) голямата полуос е 5, а малката полуос е 4;
б) разстоянието между фокусите е 8, а екцентрицитетът е $0,4$;
в) голямата ос е 26, а екцентрицитетът е $\dfrac{12}{13}\cdot$

7.9. Определете фокусите на елипсата $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{169}=1$.

7.10. Намерете допирателните към елипсата $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, минаващи през точка $M(10,4)$.

7.11. Намерете каноничните уравнения на хиперболата, ако:
а) реалната полуос е 5, а имагинерната полуос е 3;
б) разстоянието между фокусите е 10, а реалната ос е 6;
в) реалната ос е 48, а имагинерната ос е 20.

7.12. Намерете допирателните към хиперболата $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$, минаващи през точка: а) $A(\sqrt{5},4)$; б) $B(1,4)$; в) $C(3,2)$.

9.1. Изразете y като функция на x, ако:
а) $y=\sqrt{1+u},\ u=\operatorname{tg}^2 x$; б) $y=\sqrt{1-z^2},\ z=\cos x$.

9.2. Намерете дефиниционните области на функциите:
а) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-4x}}$; в) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.

9.3. Изследвайте следващите функции за четност и нечетност:
а) $y=x^4-2x^2$; б) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; в) $y=|x|\operatorname{tg}x$.

9.4. Докажете периодичността и намерете периода на функциите:
а) $y=x-[x]$; б) $y=\sin^2 x$; в) $y=\sin 3x+\cos 6x$.

9.5. Докажете, че:
а) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},\ |x|\leq 1$; б) $\cos(\operatorname{arctg}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$

9.6. Като използвате таблица 1.1, намерете стойностите:
а) $\arcsin\dfrac{1}{2}$; б) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\arcsin 1$; г) $\arccos 1$;
д) $\arccos 0$; е) $\arccos(-1)$; ж) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; з) $\operatorname{arctg}1$.

9.7. Намерете границите:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+5}{x^3-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1},\ m,n\in\mathbb{N}$; е) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-5x}{x^2-3x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{3-x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{10x}{1+x^2}$;

и) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; й) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

к) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$; л) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; н) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$;

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\ \operatorname{tg} x}{1-\cos 4x}$; п) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

р) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 33x}{\sin 2x}$; с) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\operatorname{tg} x$;

т) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$; у) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$;

ф) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{1+x}\right)^x$; х) $\lim\limits_{t\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$;

ц) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$; ч) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;

ш) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}$; щ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;

ъ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; ь) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$;

ю) $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; я) $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\cdot$

9.8. Намерете асимптотите на следните функции:

а) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; б) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $y=\dfrac{6}{x^2-9}$; г) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$;

д) $y=\ln(4-x^2)$; е) $y=2x+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\cdot$

9.9. Постройте графиките на следните функции:

а) $y=\arcsin(\sin x)$; б) $y=x-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

9.10. Дайте определение за следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$　　б) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$　　г) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$　　е) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.

10.1. Намерете точките на прекъсване на функциите и определете вида им:

а) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)(x+1)}$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = \dfrac{1}{\sin \pi x}$;

г) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$ ·

10.2. Определете функциите в посочените точки така, че да станат непрекъснати в тези точки:

а) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ в точката $x = 1$;

б) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$ в точката $x = 4$;

в) $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ в точката $x = 0$.

11.1. Намерете производните на функциите:

а) $y = 3x^2 - x + 5$;　　б) $y = x^5 - 2x^4 + 3x^2$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2},\ y'(2) =?,\ y'(-10) =?$;　　г) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x^2}$;

д) $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;　　е) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$;

ж) $y = x^2(2x-1)$;　　з) $y = (x+1)\sqrt{x}$.

11.2. Намерете производните на функциите:

а) $y = x^2 \sin x$;　　б) $y = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;

в) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$;　　г) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

д) $y = x^n + n^x,\ n \in \mathbb{N}$;　　е) $y = x^2 \cos x$.

ж) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;　　з) $y = x \ln x \operatorname{arctg} x$;

11.3. Намерете производните на функциите:

а) $y = \cos^2 x$; б) $y = \cos x^2$;

в) $y = \sin^3 \dfrac{x}{2}$; г) $y = \sin \dfrac{x^3}{2}$;

д) $y = \sqrt{1 + x^2}$; е) $y = \ln(\ln x)$;

ж) $y = \ln^2 x$; з) $y = \ln x^2$;

и) $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; й) $y = e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 8)$;

к) $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$; л) $y = \arccos \dfrac{1}{x}$;

м) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$; н) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

о) $y = (x^3 - x)^6$; п) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$;

р) $y = \dfrac{(x + 4)^2}{x + 3}$; с) $y = \left(\dfrac{1 + x^2}{1 + x}\right)^5$;

т) $y = \arcsin(\sin x)$; у) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2} \arcsin x$;

ф) $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$; х) $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x$;

ц) $y = e^x \dfrac{\sqrt{x + 1}}{(x + 2)^3 (x - 3)^2}$; ч) $y = e^{x^2} \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

12.1. Дадена е функцията $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Докажете, че уравнението $f'(x) = 0$ има три реални корена.

12.2. Намерете точка M от параболата $y = x^2$, в която допирателната е успоредна на хордата с краища $A(-1, 1)$ и $B(3, 9)$.

12.3. Покажете, че функциите

а) $y = \cos^2 x + \cos^2(x + \dfrac{\pi}{3}) - \cos x \cdot \cos(x + \dfrac{\pi}{3})$;

б) $y = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}, \ x \geq 1$

са константи и определете техните стойности.

12.4. Докажете, че

а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 - x}$ при $x < 1$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 - x} + \pi$ при $x > 1$.

12.5. Разложете $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формулата на Маклорен до x^3.

12.6. Като използвате правилата на Лопитал, намерете границите:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-1}}{\operatorname{cotg}x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x\cdot\ln(x-1)$; з) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)$;

и) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$; й) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg}x-\dfrac{1}{x})$.

13.1. Намерете интервалите на растене и намаляване на функциите:
а) $y=x^2-6x+9$; б) $y=x^2e^x$; в) $y=2x^2-\ln|x|$.

13.2. Намерете локалните екстремуми на функциите:
а) $y=1+2x^2-\dfrac{x^4}{4}$; б) $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$; в) $y=\sqrt[3]{x^2-4x+3}$.

13.3. Намерете интервалите на вдлъбнатост, изпъкналост и инфлексните точки на функциите:
а) $y=\ln(x^2+1)$; б) $y=e^x(x^2+x)$; в) $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$.

13.4. Постройте графиките на функциите:

а) $y=3x-x^3$; б) $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{4}{x}$; в) $y=\dfrac{8}{4-x^2}$; г) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

д) $y=xe^{-x^2}$; е) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$; ж) $y=\dfrac{(x+2)^2}{x^2-1}$; з) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}$.

14.1. Намерете интегралите:

а) $\displaystyle\int(x^2-4x+2)dx$; б) $\displaystyle\int(a^x+b^x)^2dx$; в) $\displaystyle\int\left(\frac{x-1}{x}\right)^2dx$;

г) $\displaystyle\int\frac{2-x+x^2}{x}dx$; д) $\displaystyle\int\frac{x-2\sqrt{x}+2}{x^2}dx$; е) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^2}$.

14.2. Намерете интегралите:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+9}$; б) $\displaystyle\int\frac{xdx}{4-x^2}$; в) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$;

г) $\displaystyle\int\frac{xdx}{1+x^4}$; д) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; е) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

14.3. Намерете интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x}dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$; в) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-x^2}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

ж) $\displaystyle\int \cos^2 6x dx$; з) $\displaystyle\int \sin x \cos 7x dx$; и) $\displaystyle\int \cos 3x \cos 5x dx$.

14.4. Намерете интегралите с интегриране по части:

а) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$; б) $\displaystyle\int x \ln x dx$; в) $\displaystyle\int x \sin x dx$;

г) $\displaystyle\int x e^x dx$; д) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx$; е) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$.

14.5. Намерете интегралите от рационалните дроби:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-7}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x-9}$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; е) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+8x+15}dx$;

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x+x^2}$; з) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^2+4x+5}$; и) $\displaystyle\int \frac{xdx}{2x^2+x-1}$.

й) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-7x^2+6x}$; к) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x+1)(x+2)^2}$; л) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

м) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+4)}$; н) $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{x^4-8x^2+16}$; о) $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{(x^2-2x+2)^2}$.

14.6. Намерете интегралите:

а) $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$; б) $\displaystyle\int (x^2+2x+3)e^x dx$; в) $\displaystyle\int (x-1)\sin 2x dx$;

г) $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx dx$; д) $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx dx$; е) $\displaystyle\int x \operatorname{arccotg} x dx$;

ж) $\displaystyle\int \arcsin x dx$; з) $\displaystyle\int x^2 \ln x dx$; и) $\displaystyle\int \ln^2 x dx$.

15.1. Пресметнете интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

в) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$; г) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx$;

д) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx$; е) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$;

ж) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; з) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$;

и) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$; й) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3 e^{x^2} dx$.

15.2. Пресметнете интегралите с интегриране по части:

а) $\int_0^2 xe^{-x}dx$; б) $\int_0^{2\pi} x\sin 2xdx$;

в) $\int_1^3 \ln xdx$; г) $\int_0^{\pi} e^x\cos xdx$.

15.3. Пресметнете интегралите с подходяща смяна на променливата:

а) $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$; б) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;

в) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; г) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

15.4. Пресметнете несобствените интеграли:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; г) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

д) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bxdx$; е) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bxdx \quad (a>0,\ b\geq 0)$.

15.5. Пресметнете лицето на фигурата, ограничена от кривите:

а) параболите $y=x^2$ и $y^2=x$;

б) параболата $y=2x-x^2$ и оста Ox;

в) параболата $y^2=2(x-1)$ и правата $x=3$;

г) параболите $y=x^2-4x+4$ и $y=2x-x^2$;

д) кривата на Аниези $y=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}$ $(a>0)$ и оста Ox;

е) астроидата $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\leq t\leq 2\pi \quad (a>0)$.

15.6. Пресметнете дължината на кривата $y=\ln x,\ \sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{8}$.

15.7. Пресметнете обема на тялото, получено при въртенето около оста Ox на фигурата, ограничена от кривите:

а) синусоидата $y=\sin x,\ 0\leq x\leq\pi$ и оста Ox;

б) окръжността $x^2+(y-r)^2=a^2 \quad (r>a>0)$.

15.8. Пресметнете лицето на повърхнината, получена при въртенето около оста Oy на :

а) кривата $y=\dfrac{x^2}{2},\ 0\leq x\leq 2$;

б) окръжността $(x-r)^2+y^2=a^2 \quad (r>a>0)$.

17.1. Решете диференциалните уравнения с отделящи се променливи:

а) $y'\sin x=y\ln y$; б) $x^3\sin y\cdot y'=2$;

в) $y'\sin x-y\cos x=0$; г) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$;

д) $xy'+y\ln y=0$; е) $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$.

17.2. Решете линейните диференциалните уравнения от първи ред:

а) $y'-y\cos x=\sin 2x$; б) $y'-y=\cos x-\sin x$;

в) $y'x\ln x-y=3x^3\ln^2 x$; г) $y'-y\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\cos^3 x}$;

д) $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$; е) $(2x-y^2)y'=2y$.

17.3. Проверете, че функциите $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ и $y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$ са две линейно независими решения на хомогенното уравнение $xy'' + 2y' + xy = 0$ $(x \neq 0)$ и намерете общото му решение.

17.4. Като отчетете задача 18.1 и приложите метода на Лагранж за вариране на константите, намерете общото решение на нехомогенното уравнение $xy'' + 2y' + xy = 1$ $(x \neq 0)$.

17.5. Намерете общото решение на уравнението

$$x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1 - \ln x)^2}{x},\ (x \neq 0),$$

като проверите, че функциите $y_1 = \ln x$ и $y_2 = x$ са две линейно независими решения на съответното хомогенното уравнение и приложите метода на Лагранж за вариране на константите.

17.6. Намерете общите решения на следните линейни диференциални уравнения с постоянни коефиценти, като използвате съответните характеристични уравнения:

а) $y'' - y = 0$; б) $y'' + y' = 0$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 0$; г) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

д) $2y'' - 3y' - 5y = 0$; е) $y''' - 7y'' + 6y' = 0$.

17.7. Определете вида на частното решение $s(x)$ на нехомогенно линейно диференциално уравнение с постоянни коефиценти, ако са известни корените $k_1,\ k_2$ на неговото характеристично уравнение и свободният член $f(x)$ на диференциалнто уравнение:

а) $k_1 = 0,\ k_2 = 1$; $f(x) = xe^{2x}$;

б) $k_1 = 0,\ k_2 = 1$; $f(x) = xe^{x}$;

в) $k_1 = 0,\ k_2 = 1$; $f(x) = x^2 + 1$;

г) $k_1 = 0,\ k_2 = 1$; $f(x) = \sin 2x$;

д) $k_1 = 0,\ k_2 = 1$; $f(x) = xe^{-x}\cos x$;

е) $k_1 = 2,\ k_2 = 2$; $f(x) = e^{2x}$;

ж) $k_1 = 2i,\ k_2 = -2i$; $f(x) = x\sin 2x$

з) $k_1 = 2i,\ k_2 = -2i$; $f(x) = e^{x}(-x\cos x + \sin x)$;

и) $k_1 = -2 + i,\ k_2 = -2 - i$; $f(x) = xe^{-2x}\cos x$;

й) $k_1 = -2 + i,\ k_2 = -2 - i$; $f(x) = x^2\cos x - 4\sin x$.

17.8. Решете уравненията:

а) $y'' - y = 4xe^{x}$; б) $y'' + y' = 4x + 3$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 13\sin 2x$; г) $y'' + 6y' + 13y = 30\cos x$;

д) $2y'' - 3y' - 5y = 49e^{-x}$; е) $y'' - 7y' + 6y = 10e^{6x}$;

ж) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$; з) $y'' + 6y' = 9x^2 + 7x + 2$.

17.9. Решете уравнението $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}\cdot$