Глава 1

Комбинаторика

Първо ще разгледаме някои понятия и теореми от комбинаториката, които се използват при решаването на много задачи от теорията на вероятностите. В разделите 1.1 – 1.3 ще дадем предварителни сведения, които ще ни помогнат при определянето на тези основните понятия.

1.1 Двойки

Нека $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ е крайно множество.

Определение 1.1. *Броят на елементите на крайното множество M се нарича негов* ***обем*** *и се бележи с $v(M)$.*

Пример 1.1. *Множеството $M = \{1, 6, 10, 15\}$ има обем $v(M) = 4$, а множеството $N = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ – обем $v(N) = 8$.*

Нека са дадени множествата $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, съответно с обеми m и n. Образуваме различни двойки (a_i, b_j), съдържащи на първо място елемента $a_i \in A$, а на второ място елемента $b_j \in B$.

Лема 1.1. *Броят на различните двойки (a_i, b_j) е равен на mn.*

Доказателство. От всички двойки съставяме правоъгълна таблица (таблица 1.1), имаща m реда и n стълба така, че двойката (a_i, b_j) да се намира в клетката, образувана от пресичането на $i-$тия ред и $j-$тия стълб. Всяка от двойките се среща в таблицата един и само един път, следователно броят на различните двойки е равен на броя на клетките в таблицата, т.е. на mn.

Таблица 1.1: Двойки

a_1, b_1	a_1, b_2	$\dots$	a_1, b_j	$\dots$	a_1, b_n
a_2, b_1	a_2, b_2	$\dots$	a_2, b_j	$\dots$	a_2, b_n
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_i, b_1	a_i, b_2	$\dots$	a_i, b_j	$\dots$	a_i, b_n
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m, b_1	a_m, b_2	$\dots$	a_m, b_j	$\dots$	a_m, b_n

Пример 1.2. *Двуцифрените числа разглеждаме като двойки, в които първата цифра се взема от множеството* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*, а втората цифра от множеството* $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*. Следователно всички двуцифрени числа са* $9 \cdot 10 = 90$ *на брой.*

1.2 $k-$торки

Нека са дадени множествата:

първото – $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\}$ с обем $v(A) = n_1$;
второто – $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n_2}\}$ с обем $v(B) = n_2$;
третото – $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_3}\}$ с обем $v(C) = n_3$;
$\dots$
$k-$тото – $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_k}\}$ с обем $v(X) = n_k$.

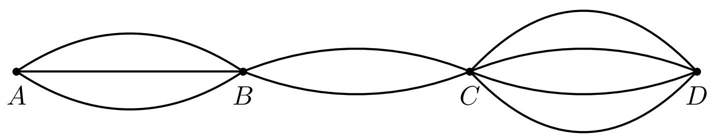
Образуваме $k-$**торки** $(a_{i_1}, b_{i_2}, c_{i_3}, \dots, x_{i_k})$, съдържащи на първо място елемент $a_{i_1} \in A$, на второ – $b_{i_2} \in B$, на трето – $c_{i_3} \in C$ и т.н., на $k-$то място елемент $x_{i_k} \in X$.

Лема 1.2. *Броят на различните* $k-$*торки* $(a_{i_1}, b_{i_2}, c_{i_3}, \dots, x_{i_k})$ *е равен на*

$$n_1 n_2 n_3 \cdots n_k.$$

При $k = 2$ твърдението на лемата се свежда до лема 1.1. Ако $k = 3$, то вземаме двойките (a_i, b_j) за елементи на ново множество M с обем $n_1 n_2$. Всяка тройка (a_i, b_j, c_k) може да се разглежда като двойка, състояща се от $(a_i, b_j) \in M$, и $c_k \in C$. Следователно броят на тези тройки е равен на $n_1n_2n_3$. С метода на математическата индукция това доказателство (за $k = 3$) може да се разпространи за произволно k. Полезно е да си представим съдържанието на лемата по следния начин. За да образуваме $k-$торката трябва да „ извадим” един елемент a_{i_1} от множеството A, – един елемент b_{i_2} от B, – един елемент c_{i_3} от C, и т.н., да „ извадим” един елемент x_{i_k} от X. Трябва да направим k „ изваждания”, като за всяко „ изваждане” имаме съответно $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ възможности. Лемата твърди, че набирането на извадката може да стане по $n_1n_2n_3 \cdots n_k$ различни начина.

Пример 1.3. *Нека от град A до град B може да се стигне по 3 пътя, от град B до град C – по 2 пътя и от град C до град D – по 4. Тогава за пътуването от град A до град D може да изберем $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ маршрута.*



Пример 1.4. *Нека автомобилните номера се различават по следните признаци: – съкратено означение на окръзите, които са 30 на брой; – четирицифрен номер от 0001 до 9999; – серия, означена с 2 от следните 11 букви $\{A, B, C, E, H, K, M, O, P, T, X\}$. Такива номера можем да разглеждаме като четворки, образувани от множества, имащи съответно обеми $30, 9999, 11, 11$. Следователно броят на различните номера е равен на $30 \cdot 9999 \cdot 11 \cdot 11 = 36\,296\,370$.*

Накрая ще отбележим, че множеството A от $k-$торки, образувани от елементите на множествата $A_1, A_2, \ldots, A_k$ се нарича **декартово произведение** на тези множества и записваме $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Ако множествата са крайни, то лема 1.2 може да се формулира още с равенството

$$v(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = v(A_1)v(A_2) \cdots v(A_k).$$

1.3 Извадки

Нека е дадено множеството $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, състоящо се от краен брой n различни елементи. Ще го наричаме **генерална съвкупност**.

Определение 1.2. *Всяка $k-$торка $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ от елементи на генералната съвкупност се нарича* ***извадка с обем*** *k.*

Възможни са различни начини за образуване на извадки, от които ще разгледаме главно следните:

• **Извадки без връщане:** Вземаме един елемент от генералната съвкупност Ω, записваме го и не го връщаме обратно в Ω. Изваждаме втори елемент, записваме го и повтаряме процедурата, докато получим извадка с нужния обем. По този начин в получената извадка елементите са различни и обемът k на извадката не може да превиши броя n на елементите от генералната съвкупност;

• **Извадки с връщане:** Вземаме елемент от генералната съвкупност Ω, записваме го и го връщаме обратно в Ω. Повтаряме тази процедура k пъти. По този начин в получената извадка някои елементи може да се повтарят и извадката може да има произволен обем;

• **Наредена извадка:** Извадка, в която редът на изваждане на елементите има значение, се нарича наредена;

• **Ненаредена извадка:** Извадка, в която редът на елементите няма значение, се нарича ненаредена.

Забележка 1.1. *За нагледност елементите на генералната съвкупност можем да си представяме като номерирани топки или като цели числа от* 1 *до* n.

Интерес представлява въпросът за броя на възможните различни извадки, за отговора на който са посветени следните няколко раздела.

1.4 Вариации без повторение

Определение 1.3. *Всяка наредена извадка без връщане с обем k от една генерална съвкупност с обем n се нарича* **вариация без повторение от n елемента $k-$ти клас**.

Понеже вариацията без повторение е извадката без връщане, то $k \leq n$. За еднакви ще смятаме тези вариации без повторение, които се състоят от едни и същи елементи, подредени по един и същи начин. В противен случай вариациите без повторение ще смятаме за различни.

Пример 1.5. *Нека* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *и са образувани следните вариации без повторение от* 3*−ти клас:* $(1, 3, 4), (5, 2, 1), (1, 4, 3)$. *Вариацията*

$(5,2,1)$ *се отличава от останалите по елементите, които я съставят. Вариациите* $(1,3,4)$ *и* $(1,4,3)$ *се състоят от едни и същи елементи, които обаче се подредени различно и следователно са две различни вариации без повторение.*

Да означим броя на различните вариации без повторение от n елемента $k-$ти клас с V_n^k.

Теорема 1.1.

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \tag{1.1}$$

Доказателство. Вариация без повторение от n елемента $k-$ти клас е наредена извадка без връщане с обем k: $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$. Първият елемент a_{i_1} на тази извадка можем да изберем по n начина, понеже генералната съвкупност Ω се състои от n елемента. Вторият елемент a_{i_2} можем да изберем вече само по $n-1$ начина, понеже от генералната съвкупност сме извадили един елемент. Последният елемент a_{i_k} можем да изберем по $n-k+1$ начина, понеже след избирането на първите $k-1$ елемента в генералната съвкупност са останали $n-k+1$ елемента. Образуването на извадката съответства на образуването на $k-$торка от множества с обеми съответно $n, n-1, \ldots, n-k+1$. Следователно, по лема 1.2 броят на различните вариации без повторение от n елемента $k-$ти клас е $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.

Пример 1.6. *Вариациите без повторение от втори клас от елементите на генералната съвкупност* $\Omega = \{a, b, c, d\}$ *са*

$$(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c).$$

Тук $n=4,\ k=2,\ V_4^2 = 4\cdot 3 = 12.$

1.5 Пермутации без повторение

Важен частен случай на вариации без повторение имаме, когато $k=n$, т.е., когато в получената извадка участват всички елементи на генералната съвкупност. Такива вариации се наричат **пермутации на n елемента**. Ясно е, че пермутациите на n елемента са наредени извадки без връщане, които са съставени от всички елементи на генералната съвкупност и различните пермутации се различават само по наредбата на тези елементи. Ако означим с P_n броя на различните пермутации на n елемента, то по теорема 1.1 при $k = n$ получаваме

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1\,.$$

Произведението $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ на първите n естествени числа се означава с $n!$ и се нарича **„ен факториел"**. Приема се, че $0! = 1! = 1$. С новото означение формулите за P_n и V_n^k добиват вида

$$P_n = n!\,, \tag{1.2}$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \tag{1.3}$$

Числото P_n показва по колко различни начина могат да се подредят n различни елемента.

Пример 1.7. *От генералната съвкупност* $\{1, 2, 3\}$ *може да се образуват* $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ *пермутации:*

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

1.6 Комбинации без повторение

Определение 1.4. *Всяка ненаредена извадка без връщане с обем k от една генерална съвкупност с обем n се нарича* ***комбинация без повторение от n елемента $k-$ти клас*** *(или просто* ***комбинация от n елемента $k-$ти клас****).*

Понеже комбинацията без повторение е извадка без връщане, то $k \leq n$ и всички елементи на комбинацията са различни. Понеже комбинацията без повторение е ненаредена извадка, т.е. редът на изваждане на елементите няма значение, то две комбинации ще считаме за еднакви, ако се състоят от едни и същи елементи. Например комбинациите $(1, 5, 2, 3)$ и $(5, 2, 1, 3)$ са еднакви. Ако означим с C_n^k броя на различните комбинации от n елемента $k-$ти клас, то е в сила следната теорема.

Теорема 1.2.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,. \tag{1.4}$$

Доказателство. Да разгледаме една ненаредена извадка без връщане

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}).$$

От нея по $P_k = k!$ начина можем да образуваме наредени извадки с обем k. За всяка от C_n^k на брой ненаредени извадки образуваме $k!$ наредени, т.е. $C_n^k \cdot k! = V_n^k$ или

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot$$

Забележка 1.2. *В математическата литература понякога вместо* C_n^k *се среща означението* $\binom{n}{k}$[1], *т.е.*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \tag{1.5}$$

Пример 1.8. *Два билета могат да се разпределят между* $n = 6$ *лица по* $C_n^k = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$ *начина. В този случай генералната съвкупност са лицата, участващи в жребия* $(n = 6)$, *а извадката се състои от двама души* $(k = 2)$, *които ще получат билети. Понеже едно лице получава не повече от един билет, то извадката е без връщане, а понеже няма значение кой от двамата пръв е получил билет и кой втори, то извадката е ненаредена. Следователно имаме комбинация от* 6 *елемента* $2-$*ри клас.*

1.7 Вариации с повторение

Определение 1.5. *Всяка наредена извадка с връщане с обем* k *от една генерална съвкупност с обем* n *се нарича* ***вариация с повторение от*** n ***елемента*** $k-$***ти клас***.

Образуването на вариация с повторение от $k-$ти клас от елементи на генералната съвкупност Ω с обем n може да стане, като от Ω избираме един елемент, записваме го и го връщаме обратно в Ω ; избираме втори елемент, записваме го и го връщаме обратно в Ω и т.н., докато получим извадка с обем k. Ясно е, че получаването на такава извадка става по

[1]Чете се „ен над ка”

същия начин, по който се образува $k-$торка от елементите на k еднакви множества. Следователно броят на различните наредени извадки с връщане с обем k е

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ пъти}} = n^k.$$

Ако означим с $\widetilde{V}_n^k$ броя на различните вариациите с повторение от n елемента $k-$ти клас, то можем да запишем

$$\widetilde{V}_n^k = n^k. \tag{1.6}$$

Пример 1.9. *Броят на всевъзможните различни колонки от Спорт Тото 1 с предвиждания за* 13 *срещи съвпада с броя на наредените извадки с връщане с обем* $k = 13$*, образувани от генералната съвкупност* $\{1, x, 2\}$ *с обем* $n = 3$*, т.е. равен е на* $\widetilde{V}_3^{13} = 3^{13} = 1\,594\,323$.

1.8 Комбинации с повторение

Определение 1.6. *Всяка ненаредена извадка с връщане с обем k от една генерална съвкупност с обем n се нарича* ***комбинация с повторение от** n **елемента** $k-$**ти клас**.*

Две комбинации с повторение са еднакви, ако се състоят от равен брой елементи a_1, равен брой елементи a_2 и т.н., равен брой елементи a_n. Например комбинациите с повторение

$$(1, 2, 3, 1, 2), (3, 2, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 3, 2)$$

от $5-$ти клас на елементите $\{1, 2, 3\}$ са еднакви.

Нека означим с $\widetilde{C}_n^k$ броя на различните комбинациите с повторение от n елемента $k-$ти клас.

Теорема 1.3.

$$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}\,. \tag{1.7}$$

Доказателство. За нагледност доказателството ще извършим за конкретен случай $n = 5$, $k = 3$, като едновременно правим аналогичен извод за общия случай. Да разгледаме една такава извадка, например,

(a_2, a_2, a_3). Към нейните елементи добавяме елементите на генералната съвкупност и получаваме нова извадка $(a_1, a_2, a_2, a_2, a_3, a_3, a_4, a_5)$, състояща се от $5 + 3$ елемента (В общия случай $n + k$ елемента). Отделяме различните елементи с черти $a_1|a_2a_2a_2|a_3a_3|a_4|a_5$. Различните извадки се различават по разположението на чертите, които са $4 = 5 - 1$ (В общия случай $n-1$). Местата, където могат да се поставят чертите, са $7 = 8-1$ (В общия случай $n+k-1$). Броят на различните извадки съвпада с броя на начините, по които 4 черти могат да се разположат на 7 места, т.е. C_7^4. В общия случай броят на комбинациите с повторение на n елемента $k-$ти клас ще съвпада с броя на начините, по които $n - 1$ черти могат да се разположат на $n + k - 1$ места, т.е.

$$C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(n+k-1-n+1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = C_{n+k-1}^{k}\,.$$

1.9 Разбивки

Да разбием генералната съвкупност Ω с обем n на s групи така, че в първата група да попаднат n_1 елемента, във втората – n_2 елемента и т.н., в $s-$та – n_s елемента, където

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n.$$

Нека не ни интересува редът на елементите във всяка от групите. За еднакви ще считаме тези две разбивки, за които в съответните групи има едни и същи елементи.

Пример 1.10. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *разбиваме на* 2 *групи с* 3 *елемента в първата група и* 2 *елемента във втората група. Разбивките* $(1, 2, 3), (4, 5)$ *и* $(3, 2, 1), (5, 4)$ *са еднакви, а разбивките* $(1, 2, 3), (4, 5)$ *и* $(2, 3, 4), (1, 5)$ *са различни.*

Да означим с $C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ броя на различните разбивки на елементите на генералната съвкупност с обем n на s групи с по n_k елемента в $k-$та група $(1 \le k \le s)$. В сила е следната теорема.

Теорема 1.4.

$$C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_s!}\,. \tag{1.8}$$

Забележка 1.3. *Теоремата е вярна и ако някое* $n_k = 0$*. Тогава* $n_k! = 0! = 1$*. В този случай може да считаме, че в* $k-$*та група не е сложено нищо.*

Забележка 1.4. *Числото* $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *показва по колко начина* n *елемента можем да разпределим в две групи, като в първата има* $n_1 = k$ *елемента, а във втората* $n_2 = n - k$ *елемента.*

Пример 1.11. *По колко начина* 10 *студенти може да се разпределят на* 4 *групи, състоящи се от* $3, 3, 2$ *и* 2 *души всяка? В този случай*

$$n = 10, s = 4, n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 2, n_4 = 2$$

или общо имаме $\dfrac{10!}{3!3!2!2!} = 25200$ *начина.*

1.10 Биномна формула на Нютон

Във формулите

$$(x + y)^0 = 1,$$
$$(x + y)^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y,$$
$$(x + y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2,$$
$$(x + y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3$$

е дадено разложението на $(x + y)^n$ при $n = 0, 1, 2, 3$ по степените x^ky^{n-k} $(0 \leq k \leq n)$ и е показано какви са коефициентите пред тези степени.

Следната **биномна формула на Нютон** обобщава тези формули за произволно n:

$$(x + y)^n = C_n^0x^0y^n + C_n^1x^1y^{n-1} + \cdots + C_n^kx^ky^{n-k} + \cdots + C_n^nx^ny^0. \quad (1.9)$$

Коефициентите C_n^k пред x^ky^{n-k} се наричат **биномни коефициенти**. Като използваме знака за сума $\sum$, можем да запишем формула (1.9) още във вида

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^kx^ky^{n-k}. \quad (1.10)$$

Пример 1.12. *При $n = 4$ имаме*

$$(x+y)^4 = C_4^0 x^0 y^4 + C_4^1 x^1 y^3 + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x^3 y^1 + C_4^4 x^4 y^0.$$

Понеже $C_4^0 = C_4^4 = 1,\ C_4^1 = C_4^3 = \dfrac{4!}{1!3!} = 4,\ C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6,$ *то*

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Биномните коефициенти имат следните свойства:

Свойство 1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
Свойство 2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
Свойство 3. $C_n^k = C_n^{n-k}$ при $0 \leq k \leq n$;
Свойство 4. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ при $1 \leq k \leq n$;
Свойство 5. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ при $n \geq 0$;
Свойство 6. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$.

Свойства $1-4$ се доказват с непосредствена проверка и прилагане на формула (1.4), Свойство 5 и свойство 6 следват от формула (1.9), като положим съответно $x = y = 1$ и $x = -1, y = 1$.
Свойствата $1-4$ може да се илюстрират нагледно, ако разположим биномните коефициенти в един безкраен триъгълник, наречен **триъгълник на Паскал**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
C_n^0 & & C_n^1 \dots\dots\dots & & C_n^{n-1} & & C_n^n
\end{array}$$

Свойство 1 означава, че по бедрата на триъгълника на Паскал са разположени единици, а свойство 3, че той е симетричен относно височината си. Свойство 4 означава, че всеки вътрешен елемент може да се получи като сума на двата си съседа от предния ред. Така че, ако сме написали първите n реда, можем да пресметнем и елементите на $(n+1)-$я ред.

Пример 1.13. *Да пресметнем биномните коефициенти при $n = 6$.*

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Този метод за пресмятане на биномните коефициенти е удобен при малки n. При големи n е удобно да се използва формулата

$$
C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}, \tag{1.11}
$$

която следва от (1.4). В числителя на (1.11) написваме k множителя, като започнем с n и намаляваме всеки следващ множител с 1, а в знаменателя написваме като множители числата от 1 до k.

При големи k е удобно да се прилага свойство 3.

Пример 1.14.

$$
C_{50}^{48} = C_{50}^{2} = \frac{50\cdot 49}{1\cdot 2} = 25\cdot 49 = 1225.
$$

Пример 1.15.

$$
C_{20}^{17} = C_{20}^{3} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 20\cdot 19\cdot 3 = 1140.
$$

1.11 Задачи

1.1. По колко различни начина могат да се подредят 10 различни книги в една редица?

1.2. Колко различни петцифрени числа могат да се образуват чрез разместване на цифрите $0, 1, 2, 3, 4$?

1.3. Колко различни трицифрени числа могат да се образуват чрез разместване на цифрите $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

1.4. Колко различни трицифрени числа могат да се образуват чрез разместване на цифрите $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

1.5. Колко различни билета с посочени начална и крайна гара могат да се отпечатат, ако общият брой на гарите е 50?

1.6. По колко начина може да се раздели колода от 52 карти на две пачки от по 26 карти така, че във всяка от тях да има по две дами?

1.7. Шест различни предмета се боядисват съответно два в зелен, два в червен и два в син цвят. По колко различни начина могат да се боядисат предметите?

1.8. По колко различни начина могат да се паркират един до друг два фиата, три опела и две шкоди?

1.9. По колко начина могат да се хвърлят десет различни зара?

1.10. Колко различни резултата могат да се наблюдават при хвърлянето на два неразличими зара?

1.11. Плочките на домино се отбелязват с две числа. Колко различни плочки могат да се образуват от числата $1, 2, \dots n$?

1.12. 20 топки с номера от 1 до 20 се поставят в 10 различни кутии. По колко различни начина могат да се разпределят топките в кутиите, ако всяка кутия може да побере всичките 20 топки?

1.13. По колко различни начина могат да се означат върховете на триъгълник, ако всеки връх се означава с главна буква от латиницата (26 букви)?

1.14. От колода с 52 карти се изваждат последователно 6 карти без връщане. По колко различни начина могат да се извадят картите така, че две от тях да са аса и две десятки?

1.15. В партида от N изделия има M дефектни. По колко различни начина от партидата могат да се вземат n изделия, така, че точно k от тях да бъдат дефектни ($M \leq N, k \leq n \leq N$)?

1.16. Нека $\Omega = \{a, b, c\}$. Колко $7-$буквени думи има, в които a се среща 3 пъти, а b и c – по 2 пъти?

1.17. По колко начина може да се отговори на 10 въпроса с „да” и „не”, като 5 пъти се дава положителен и 5 пъти отрицателен отговор?

1.18. По колко начина пет души може да се подредят за групова снимка?

1.19. По колко начина може да се разположат n топа върху шахматна дъска $n \times n$ така, че никои два да не се атакуват? Същият въпрос за дъска с размери $m \times n$ $(m \geq n)$.

1.20. По колко начина девет студенти може да се настанят в три стаи, ако всяка стая е за трима души? Колко са начините, ако двама от студентите: а) не желаят да живеят в една стая; б) желаят да са в една стая?

1.21. По колко начина може да се разпределят n еднакви подаръка между k $(k \leq n)$ деца: а) без ограничения; б) с ограничението всяко дете да получи поне един подарък.

1.22. По колко начина 52 карти може да се раздадат на четири играчи на бридж?

1.23. Кодова група се състои от шест поредни символа, които могат да бъдат точка $(\cdot)$ или тире $(-)$. Колко различни кодови групи може да се образуват?