Глава 2

Събития и действия с тях. Вероятност

2.1 Пространство от елементарни събития

В ежедневието често се правят твърдения, в които се среща думата вероятност. Например:

• при хвърляне на зар: „Вероятността да се паднат четен брой точки е 50%";

• при изпълнение на наказателен удар в баскетбола: „Вероятността за попадение е 90%";

• „Вероятността да се спечели шестица с една комбинация на Спорт-Тото 6/49 при едно теглене е много малка".

Общото в посочените примери е, че преди провеждането на даден опит се дава количествена оценка (вероятност) за осъществяване на някакво събитие. За всяко от разглежданите събития („падане на четен брой точки", „попадение в коша", „улучване на шестица") е характерно следното: предварително е известно, че даденото събитие може да се осъществи при съответния опит, но и че може да не се осъществи; едва след опита става ясно дали събитието се е осъществило. Такива събития се наричат **случайни**. Целта на следващите разглеждания е да дадем математическа формулировка на понятията **опит, случайно събитие** и **вероятност**.

Понятията опит и случайно събитие са основни в теорията на вероятностите и затова се дават описателно, с подходящи примери.

Казваме, че се провежда опит (експеримент, изпитание), ако се осъществява определен комплекс от условия. Теорията на вероятностите има за обект на изследване само опити, които отговарят на следните условия:

– възможност за неограничен брой повторения на опита;

– предварително е известно множеството от възможните изходи (резултати) от провеждания опит;

– при всеки опит може да се осъществи един и само един от възможните изходи.

По-нататък, когато говорим за опити, ще предполагаме, че те отговарят на горните условия. Всеки от изходите, посочен в третото условие, се нарича **елементарно събитие** и се бележи с ω . Съвкупността от всички елементарни събития на даден опит се нарича **пространство от елементарни събития** на опита и се означава с Ω.

Пример 2.1. *Хвърляне на монета:* $\Omega = \{$*лице, герб*$\}$.

Пример 2.2. *Хвърляне на зар:* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пример 2.3. *Хвърляне на монета, докато падне „герб" :*
$\Omega = \{$*г, лг, ллг, лллг,* $\dots\}$.

Пример 2.4. *Резултат от измерване:* $\Omega = [a, b]$*−числен интервал.*

Определение 2.1. *Пространството от елементарни събития* Ω *се нарича:*

– **дискретно***, ако е крайно или изброимо;*

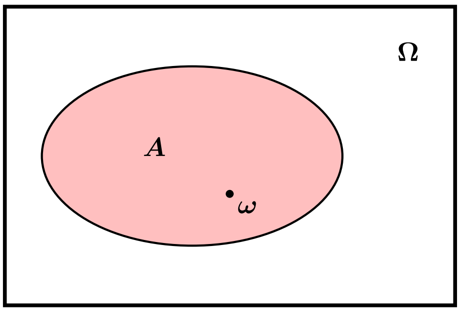
– **непрекъснато***, ако не е дискретно.*

Забележка 2.1. *В примерите* 2.1−2.3 *пространството* Ω *е дискретно, а в пример* 2.4 *е непрекъснато.*

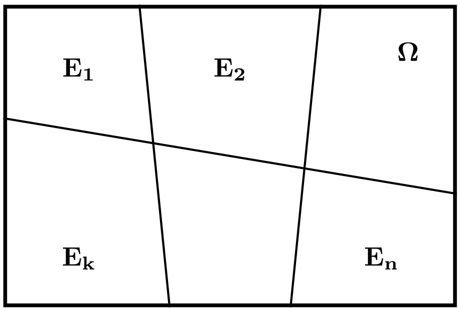
2.2 Събития и действия с тях

Определение 2.2. *Всяко подмножество* A *на пространството от елементарни събития* Ω *се нарича* **събитие***.*

Определение 2.3. *Казваме, че събитието* A *се е* **сбъднало (появило, осъществило)***, ако резултатът от опита е елементарно събитие* ω*, съдържащо се в* A*.*



Фиг. 2.1: A се сбъдва $\iff$ $\omega \in A$



Фиг. 2.2: $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$

Частни случаи:

– $A = \{\omega\}$ – сбъдва се само, ако изходът е ω;

– $A = \Omega$ – **сигурно (достоверно)** събитие;

– $A = \varnothing$ – **невъзможно** събитие, ако не съдържа елементи на Ω, т.е. събитието A не се сбъдва при дадения опит.

Пример 2.5. *При хвърляне на зар $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. С такъв зар събитието $A = \{7\}$ е невъзможно. Ако обаче се хвърля зар, имащ 7 точки на една от стените, това събитие не е невъзможно.*

Определение 2.4. *Казваме, че* **„А влече В"** *и пишем $A \subset B$, ако от сбъдването на събитието A следва сбъдването на събитието B, т.е., ако $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$.*

Пример 2.6. *Хвърляне на зар: $A = \{6\}$ влече $B = \{четно\} = \{2, 4, 6\}$.*

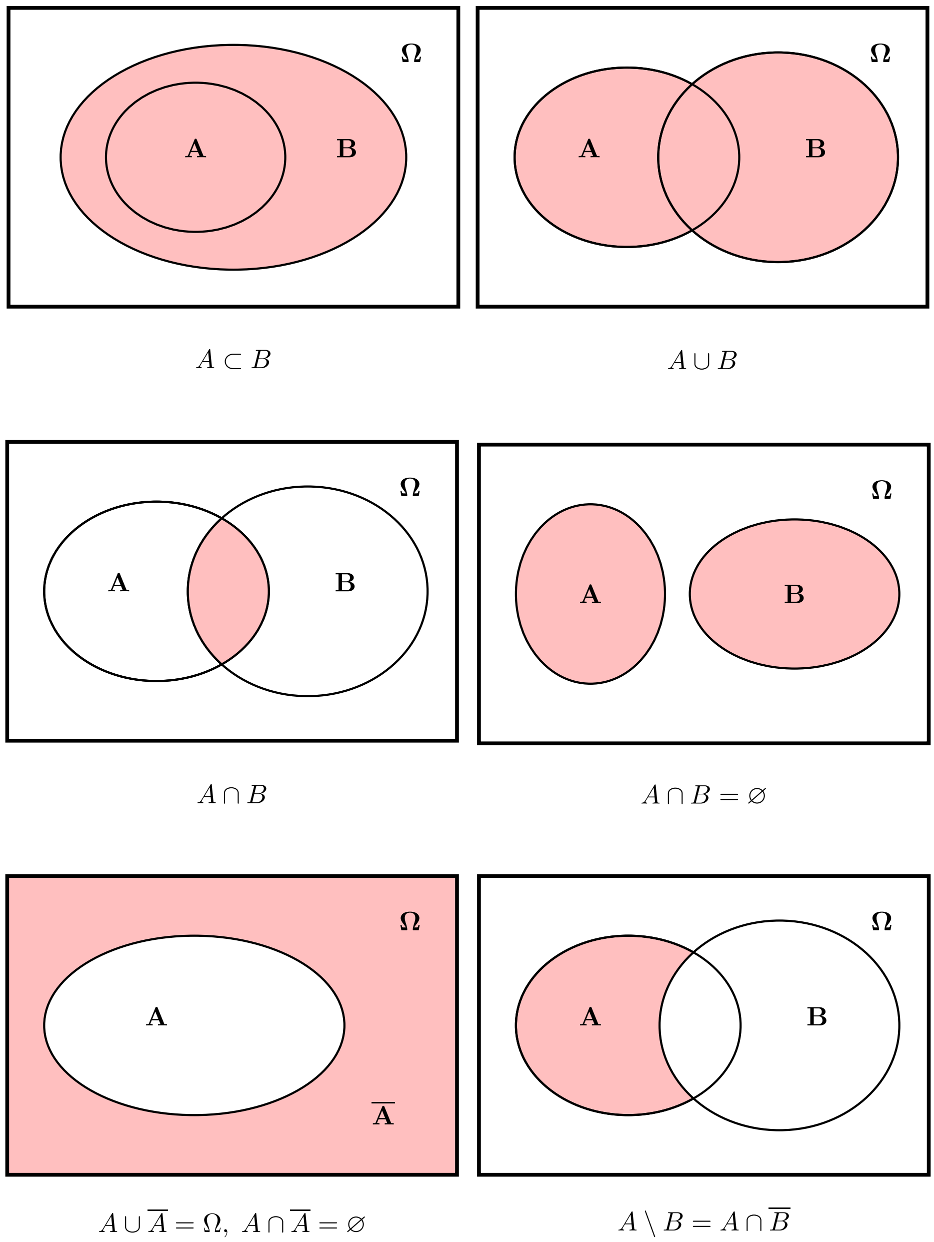
Определение 2.5. *Ако $A \subset B$ и $B \subset A$, то казваме, че събитията A и B са* **еквивалентни** *и пишем $A = B$.*

Определение 2.6. Сума *на събитията A и B се нарича събитието $A \cup B$ (A или B, A плюс B), което се сбъдва тогава и само тогава, когато се сбъдне поне едно от събитията A, B, т.е.*

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}.$$

Определение 2.7. Произведение *на събитията A и B се нарича събитието $A \cap B$ (A и B, A по B), което се сбъдва тогава и само тогава, когато се сбъднат и двете събития A, B, т.е.*

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}.$$



Фиг. 2.3: Диаграми на Вен–Ойлер

Определение 2.8. *Събитията A и B се наричат* **несъвместими***, ако*

$$A \cap B = \varnothing.$$

Определение 2.9. *Събитието $\overline{A}$ се нарича* **противоположно** *на събитието A, ако се сбъдва тогава и само тогава, когато не се сбъдва събитието A, т.е. $\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.*

Имаме, че $A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Определение 2.10. Разлика *на събитията A и B се нарича събитието $A \setminus B$, което се сбъдва тогава и само тогава, когато се сбъдне A и не се сбъдне B, т.е. $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ и $\omega \notin B\}$.*

Имаме, че $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Определение 2.11. *Събитията $E_1, E_2, \dots, E_n$ образуват* **пълна група от несъвместими събития***, ако:*
1) $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega$;
2) $E_k \cap E_j = \varnothing$, *ако* $k \neq j$.

Пример 2.7. *Двойките $A, \overline{A}$ и $\Omega, \varnothing$ образуват пълни групи от несъвместими събития.*

Определенията 2.4 − 2.10 са илюстрирани с диаграмите на Вен–Ойлер на фиг. 2.3. Правилата за действия със събития съвпадат с правилата за действия с множества. Основните от тях са следните:

1. $A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$;
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
5. $A \cup \Omega = \Omega, \qquad A \cap \Omega = A$;
6. $A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$;
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.3 Вероятност

Вероятността за сбъдване на събитието A е число, което се отбелязва с $P(A)$. Определянето на $P(A)$ може да стане по различни начини и затова се налага да направим някои ограничения. Приемаме, че вероятностите на различните събития получават стойности в ограничен числен интервал, като за целта най-подходящ е интервалът $[0, 1]$ (Тогава лесно дадена вероятност може да се изрази в проценти, които се изменят от 0 до 100). Освен това, приемаме, че достоверното събитие има най-голяма вероятност 1, а невъзможното събитие има най-малка вероятност 0:

$$0 \leq P(A) \leq 1, \qquad P(\Omega) = 1, \qquad P(\varnothing) = 0. \tag{2.1}$$

Да разгледаме няколко различни метода за определяне на вероятност, която удовлетворява горните изисквания.

2.3.1 Статистическа вероятност

Прилагането на статистическата вероятност започва през 17 век във Великобритания при решаване на задачи от застрахователното дело. Схемата за определяне на $P(A)$ е следната: Провеждат се n еднотипни опита, в които събитието A се сбъдва k пъти. Определя се числото

$$w = \frac{k}{n}\,,$$

което се нарича **честота** на сбъдване на събитието A. Тогава е в сила **формулата за статистическата вероятност**

$$P(A) \approx w. \tag{2.2}$$

Пример 2.8. *Бюфон хвърля монета $n = 4040$ пъти, при което „герб” се пада $k = 2048$ пъти, т.е. получената честота на попаденията „герб” е $w = 0.5069$.*

При аналогични опити К. Пирсън получава следните резултати:

$$\begin{aligned} &n = 12000, \quad k = 6019, \quad w = 0.5016, \\ &n = 24000, \quad k = 12012, \quad w = 0.5005. \end{aligned}$$

Очевиден недостатък на метода е, че вероятността се определя приблизително. От друга страна, много често статистическият метод дава единствената възможност за определяне на неизвестна вероятност.

Формула (2.2) се обосновава с теоремата за големите числа (Глава 8).

2.3.2 Класическа вероятност

Прилагането на класическата вероятност започва през 17 век във Франция за оценка на залозите при хазартни игри с карти и зарове. При определянето на неизвестна вероятност по класическия метод трябва да са изпълнени следните изисквания:

1) Пространството Ω е крайно: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$;

2) Ω се състои от равновероятни изходи:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n} \cdot \tag{2.3}$$

Нека събитието A има k благоприятни изхода: $A = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_k}\}$. Тогава се прилага **формулата за класическата вероятност**

$$P(A) = \frac{k}{n}\,,$$

която се записва още така:

$$P(A) = \frac{\text{благоприятни изходи}}{\text{всевъзможни изходи}} \cdot \tag{2.4}$$

Забележка 2.2. *При опити с монети, зарове, карти, изваждане на топки от урна изискването* (2.3) *означава следното:*

– монетата е правилна и попаденията „герб” и „лице” са равновероятни: $P(г) = P(л) = \dfrac{1}{2} \cdot$

– зарът не е фалшив и попаденията $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *са равновероятни:* $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \dfrac{1}{6} \cdot$

– колодата е нова, картите не са белязани и са старателно разбъркани така, че всички карти да имат равна вероятност да бъдат изтеглени;

– топките в урната са еднакви, разбъркани са старателно и всичките имат равна вероятност да бъдат извадени.

В разглежданите по-нататък примери ще предполагаме, че тези условия винаги са изпълнени.

Пример 2.9. *При хвърляне на зар събитието* $A = \{\textit{четно}\}$ *има* $k = 3$ *благоприятни изхода:* $A = \{2, 4, 6\}$. *Тогава* $P(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \cdot$

Пример 2.10. *Разполагаме с нова колода от* 52 *карти за игра. След като колодата е разбъркана старателно, може да считаме, че всички карти имат равни вероятности да бъдат изтеглени. От колодата без връщане са избрани* 5 *карти. Каква е вероятността това да са* 2 *аса и* 3 *попа, т.е.* $P(2A3K) = ?$

Първо намираме всевъзможните изходи от опита. Избраните карти образуват ненаредена извадка без връщане с обем 5 *от генерална съвкупност с обем* 52 *(всички карти на колодата). Следователно всевъзможните изходи от опита са* $n = C_{52}^5 = 2\,590\,960$. *Начините да изберем* $2A$ *от* $4A$ *са* $k_1 = C_4^2 = 6$. *Начините да изберем* $3K$ *от* $4K$ *са* $k_2 = C_4^3 = C_4^1 = 4$. *Тогава благоприятните изходи от опита са* $k = k_1 \cdot k_2 = 6 \cdot 4 = 24$ *и*

$$P(2A3K) = \frac{k}{n} = \frac{24}{2\,590\,960} = \frac{3}{323\,870}\,.$$

Пример 2.11. *Каква е вероятността* p *да се улучи „шестица” с една комбинация при първо теглене на Спорт Тото* 6/49*?*

Изтеглените 6 *числа образуват ненаредена извадка без връщане с обем* 6 *от генерална съвкупност с обем* 49 *(всички топки в урната). Следователно всевъзможните изходи са* $n = C_{49}^6 = 13\,983\,816$. *Благоприятният изход е един:* $k = 1$ *(попълнената във фиша комбинация). Следователно*

$$p = \frac{1}{13\,983\,816}\,.$$

Пример 2.12. *Каква е вероятността при хвърляне на два зара сумата от точките да е равна на* 5*?*

При хвърляне на 2 *зара (син и зелен) всевъзможните изходи са* 36*:*

$$\begin{array}{c}
(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),
\end{array}$$

където означението (i, j) *показва, че на синия зар са се паднали* i *точки, а на зеления –* j *точки. Означаваме с* A *събитието, че сумата от точките е равна на* 5. *Благоприятните изходи са* 4*:* $(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$.

Следователно

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}\,.$$

Пример 2.13. *Хвърлят се три зара. Кое събитие е по-вероятно: $A = \{$сумата от точките е $11\}$ или $B = \{$сумата от точките е $12\}$?*

Лесно се проверява, че числата 11 и 12 се разлагат на сума на три цели положителни събираеми по шест различни начина, а именно:

$$11 = 1+5+5 = 1+4+6 = 2+3+6 = 2+4+5 = 3+3+5 = 3+4+4;$$
$$12 = 1+5+6 = 2+4+6 = 2+5+5 = 3+4+5 = 3+3+6 = 4+4+4.$$

Оттук може да се направи изводът, че събитията A и B са равновероятни. Този извод обаче е неправилен, понеже не е отчетен фактът, че различните разложения имат различна „тежест". Ще отбележим, че дори заровете външно да не се отличават един от друг, реално те са различни и на всеки от тях, независимо един от друг, може да се падат равновероятните изходи $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Да наречем различните зарове „първи", „втори" и „трети" и нека записът (x, y, z) означава, че на първия зар са се паднали x точки, на втория– y точки и на третия– z точки. Тогава различните разложения може да се осъществят по различен брой начини. Така например:

— разложението $1+4+6$ (всички събираеми са различни) се пада по 6 различни начина: $(1, 4, 6), (1, 6, 4), (4, 1, 6), (4, 6, 1), (6, 1, 4), (6, 4, 1)$;

— разложението $1+5+5$ (две от събираемите са равни) се пада по 3 различни начина: $(1, 5, 5), (5, 1, 5), (5, 5, 1)$.

Затова събитието $A = \{$сумата от точките е $11\}$ може да се осъществи по

$$3+6+6+6+3+3 = 27$$

различни равновероятни начина.

Събитието $B = \{$сумата от точките е $12\}$ се осъществява по

$$6+6+3+6+3+1 = 25$$

различни равновероятни начина, понеже разложението $4+4+4$ се пада само по един начин: $(4, 4, 4)$. Оттук следва изводът, че

$$P(A) > P(B),$$

т.е. с по-голяма вероятност сумата от точките е равна на 11*, отколкото на* 12*. Като отчетем, че при хвърляне на три зара общият брой равновероятни изходи е равен на* $6^3 = 216$ *и приложим формулата за класическата вероятност, получаваме, че*

$$P(A) = \frac{27}{216}\,, \qquad P(B) = \frac{25}{216}\,\cdot$$

2.3.3 Геометрична вероятност

Нека Ω е ограничено множество в равнината с лице $S(\Omega) > 0$ и A е негово подмножество с лице $S(A)$ (фиг. 2.1). Нека се провежда следният опит: По случаен начин от множеството Ω се избира точка ω. Възниква въпросът: Каква е вероятността $P(A)$ случайно избраната точка ω да попадне в A? При много общи предположения може да се докаже, че

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}\,\cdot \tag{2.5}$$

Формула (2.5) се нарича **формула за геометричната вероятност**. Нейно обобщение е формулата

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}\,\cdot \tag{2.6}$$

където с $m(A)$ е означена мярката на множеството $A \subset \Omega$.

В случая, когато Ω е ограничен интервал върху правата, а A е негов подинтервал, то тази мярка е $L(A)$ – дължината на A. Когато Ω е ограничено множество в тримерното пространство с положителен обем, а A е негово подмножество, то тази мярка е $V(A)$ – обемът на A.

Пример 2.14. *Двама души* (B *и* C) *се уговарят за среща на определено място през същия ден между* 17 *и* 18 *часа. Чакат се* 20 *минути, като двамата избират времето на пристигане на уговореното място случайно и независимо един от друг. Каква е вероятността срещата да се осъществи?*

Ще отговорим на този въпрос, като използваме формулата за геометрична вероятност. Нека:

- *B пристига на уговореното място в* 17 *часа и* x *минути, където* $x \in [0, 60]$*;*

- *C пристига на уговореното място в* 17 *часа и* y *минути, където* $y \in [0, 60]$.

Тогава опитът „пристигане на B и C на уговореното място" е еквивалентен на опита „случаен избор на точка (x, y) *от квадрата* $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$*".*

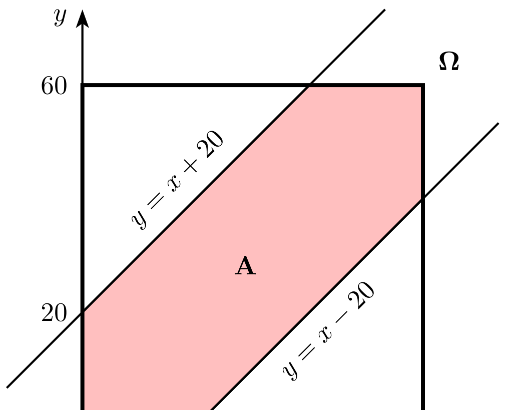
Множеството A на благоприятните изходи се определя от условието „чакат се 20 *минути", което се задава с неравенството* $|y - x| \leq 20$ *и е еквивалентно на неравенствата*

$$-20 \leq y - x \leq 20$$

или

$$x - 20 \leq y \leq x + 20\,.$$

От горните неравенства следва, че множеството A се състои от тези точки на квадрат Ω*, които лежат между правите с уравнения* $y = x - 20$ *и* $y = x + 20$ *(фиг.* 2.4*). Тогава вероятността за срещата е равна на*



Фиг. 2.4: Към пример 2.14

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{20 \cdot 100}{60 \cdot 60} = \frac{5}{9}\,.$$

Ще отбележим, че статистическата, класическата и геометричната вероятности освен свойствата (2.1) имат и други общи свойства, сред които ще отбележим следното:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{2.7}$$

за всеки две несъвместими събития A и B.

2.3.4 Аксиоматичен метод

Наличието на няколко начина за определяне на вероятност силно затруднява развитието на теорията, защото всяко вероятностно твърдение трябва да се доказва за всяка от използваните вероятности. Тези затруднения се избягват, като теорията на вероятностите се изгради аксиоматично. Това означава да се въведат основните понятия и да се зададат основните зависимости между тях (аксиоми). След това теорията се изгражда само на базата на тези аксиоми.

Аксиомите на теорията на вероятностите са формулирани през 1929 г. от Колмогоров[1]. През 1933 г. той публикува на немски език монографията [13], в която се съдържат основните резултати на теорията на вероятностите, доказани на базата на въведените аксиоми.

Ще отбележим, че аксиоматичното изграждане на теорията на вероятностите става възможно поради това, че към този момент са били изградени две основни математически теории: Теория на множествата на Кантор[2] и Теория на мярката и интеграла на Лебег[3].

Въвеждането на вероятност става при следния ред на действие:

I. Определя се пространството от елементарни събития Ω.

II. Определя се множеството $\mathcal{S}$ от **случайни събития**, т.е. избират се тези събития $A \subset \Omega$, за които ще се определя вероятност. Записът $A \in \mathcal{S}$ означава, че A е случайно събитие. Случайните събития трябва да отговарят на следните условия:

[1]Колмогòров Андрей Николаевич (1903–1987) – руски математик
[2]Кàнтор (Cantor) Георг (1845–1918) – герм. математик
[3]Лебѐг (Lebesque) Анри Леон (1875–1941) – френски математик

1) $\Omega \in \mathcal{S}$.

2) Ако $A_k \in \mathcal{S},\ k = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup\limits_k A_k \in \mathcal{S}$ и $\bigcap\limits_k A_k \in \mathcal{S}$.

3) Ако $A \in \mathcal{S}$, то $\overline{A} \in \mathcal{S}$.

III. Определя се вероятност $P(A)$ за всяко $A \in \mathcal{S}$ така, че да са изпълнени аксиомите:

Аксиома 1: $P(A) \geq 0$ за всяко $A \in \mathcal{S}$.

Аксиома 2: $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3: Ако $A_k \in \mathcal{S},\ k = 1, 2, \ldots$ и $A_k \cap A_j = \varnothing,\ k \neq j$, то

$$P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)\,.$$

Следствие 2.1. *Ако $E_1, E_2, \ldots, E_n$ образуват пълна група от несъвместими събития, то*

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega,$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(\Omega)$$

и от аксиоми 2 *и* 3 *следва, че*

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1\,. \tag{2.8}$$

Следствие 2.2. *Понеже събитията $A, \overline{A}$ образуват пълна група от несъвместими събития, то*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1\,. \tag{2.9}$$

Следствие 2.3. $P(\Omega) + P(\varnothing) = 1$, *откъдето получаваме, че* $P(\varnothing) = 0$.

Забележка 2.3. *Равенствата* (2.8) *и* (2.9) *се използват често в теорията на вероятностите. Така например* (2.9) *се прилага за намиране на вероятността $P(A)$, след като сме определили първо вероятността $P(\overline{A})$, която понякога се пресмята по-лесно.*

2.4 Задачи

2.1. Докажете, че събитията $A, \overline{A} \cap B$ и $\overline{A \cup B}$ образуват пълна група от несъвместими събития.

2.2. Стрелец стреля по мишена три пъти. С $p_i,\ i = 1, 2, 3$ означаваме събитието {попадение в мишената при $i-$я изстрел}. Напишете аналитичните изрази за събитията:

A ={нито едно попадение при трите изстрела},

B ={едно попадение при трите изстрела},

C ={две попадения при трите изстрела},

D ={три попадения при трите изстрела},

E ={поне едно попадение при трите изстрела},

F ={поне две попадения при трите изстрела}.

2.3. Двадесет ученици са заели по случаен начин местата на един ред в киносалона. Намерете вероятността двама от тях (например Иванчо и Марийка) да се окажат един до друг.

2.4. За да се намали общият брой на игрите, $2n$ отбора по жребий се делят на две подгрупи по n отбора. Да се намери вероятността двата най-силни отбора да се окажат:

а) в различни групи;

б) в една група.

2.5. Във влак с три вагона се качват десет пътници, като всеки от тях избира по случаен начин вагона. Намерете вероятността:

а) в първия вагон да се качат трима пътници;

б) в един от вагоните да се качат петима, в друг – трима и в трети – двама пътници;

в) в първи вагон да се качат петима, във втори вагон – трима и в трети вагон – двама пътници;

2.6. Пет различни топки се разпределят по случаен начин в три различни кутии. Намерете вероятностите на следните събития:

а) първата кутия е празна;

б) само първата кутия е празна;

в) само една кутия е празна;

г) поне една кутия е празна;

д) няма празни кутии;

ж) трите кутии са празни;

з) първата или втората кутия е празна.

2.7. Зар се хвърля шест пъти. Намерете вероятността да се появят по веднъж $1, 2, 3, 4, 5, 6$ точки.

2.8. Зар е хвърлен два пъти. Наблюдаваният изход е двойка цели числа, съответстващи на броя на точките, паднали се при първото и второто хвърляне. Опишете множеството Ω от възможните изходи на опита и следните събития:

$A =$\{двата пъти броят на точките се дели на три\};

$B =$\{сумата от броя на точките е равна на пет\};

$C =$\{двата пъти броят на точките е по-малък от три\};

$D =$\{двата пъти са се паднали еднакъв брой точки\}.

2.9. Монета е хвърлена три пъти. Наблюдаваните изходи са „пада се герб” (г) или „пада се лице” (л) на горната страна на монетата. Опишете множеството Ω от възможните изходи на опита и следните събития:

$A =$\{„герб” се е паднал точно един път\};

$B =$\{нито един път не са се е паднало „лице”\};

$C =$\{попаденията „герб” са повече от попаденията „лице”\};

$D =$\{„герб” се е паднал не по-малко от два пъти подред\}.

2.10. Нека при даден опит се наблюдават три събития: A, B и C. Да се изразят с A, B и C следните събития:

$E_1 =$\{от трите събития се е сбъднало точно едно\};

$E_2 =$\{от трите събития се е сбъднало поне едно\};

$E_3 =$\{от трите събития са се сбъднали точно две\};

$E_4 =$\{от трите събития са се сбъднали не по-малко две\};

$E_5 =$\{от трите събития не се е сбъднало нито едно\};

$E_6 =$\{от трите събития се е сбъднало не повече от едно\};

$E_7 =$\{от трите събития не се е сбъднало поне едно\}.

2.11. Хвърлят се два зара: червен и бял. Намерете вероятностите на следните събития:

$A =$\{броят на точките на двата зара е еднакъв\};

$B =$\{точките на червения зар са повече от тези на белия зар\};

$C =$\{сумата от точките е четно число\};

$D =$\{сумата от точките е по-голяма от две\};

$E =$\{сумата от точките не превишава шест\};

$F =$\{паднала се е поне една шестица\};

$G =$\{произведението на точките е равно на дванадесет\}.

2.12. В студентска група от 15 девойки и 10 младежи се разиграват 5 билета за рок-концерт. Каква е вероятността три от билетите да се паднат на девойки?

2.13. Отделение, което се състои от 4 „опитни" и 8 „неопитни" бойци, е разделено по случаен начин на четири групи по трима души. Каква е вероятността, че във всяка група ще има по един опитен боец?

2.14. Вероятността за улучване на мишената при един изстрел е равна на 0.6. По мишената се стреля с единични изстрели до първо попадение. Каква е вероятността, че ще бъдат направени не повече от три изстрела?

2.15. Намерете вероятността номерът на случайно избран трамваен петцифрен билет (номерата са $00000, 00001, \ldots, 99999$) да съдържа:

а) само еднакви цифри;
б) две еднакви цифри;
в) три еднакви цифри;
г) четири еднакви цифри;
д) две двойки еднакви цифри;
е) една двойка и една тройка от еднакви цифри.

2.16. В барабанен револвер със 7 гнезда са заредени 5 патрона. Барабанът се завърта по случаен начин, в резултат на което срещу ударника на револвера застава едно от гнездата и се натиска спусъкът. Намерете вероятността, ако опитът се повтори, да се произведе:

а) нито един изстрел;
б) един изстрел;
в) два изстрела.

2.17. Зенитна батарея се състои от шест оръдия и води огън по дванадесет самолета. Всяко от оръдията избира целта си по случаен начин и независимо от другите. Да се намери вероятността:

а) оръдията стрелят по един самолет;
б) оръдията стрелят по различни самолети.

2.18. В хоризонтална равнина са начертани успоредни прави, намиращи се една от друга на разстояние 8 cm. Върху равнината се хвърля кръг с радиус 3 cm. Каква е вероятността кръгът да не пресече нито една от линиите?

2.19. В уравнението $x^2+2ax+b=0$ стойностите на коефициентите a и b са равновъзможни в квадрата $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Намерете вероятностите на събитията:

$A = \{$корените на уравнението са реални$\}$;
$B = \{$корените на уравнението са положителни$\}$.