Глава 3

Действия с вероятности

3.1 Вероятност на сума

A) Събитията A и B са несъвместими. Тогава по Аксиома 3

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,. \tag{3.1}$$

B) Общ случай. Тогава е в сила формулата

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,. \tag{3.2}$$

3.2 Условна вероятност

Нека $P(B) > 0$.

Определение 3.1. *Вероятността*

$$P(A|B) = P(\textit{да се сбъдне } A\textit{, при условие, че се е сбъднало } B)$$

се нарича **условна вероятност**.

Пример 3.1. *Хвърляме зар един път. За събитията* $A = \{\textit{пада се шестица}\}$ *и* $B = \{\textit{пада се четно}\}$ *имаме,че*

$$P(A) = \frac{1}{6},\ P(A|B) = \frac{1}{3}\,\cdot$$

А) Класическа вероятност. Нека Ω има n изхода, B – m изхода, а $A \cap B$ – k изхода. Нека при опита се е сбъднало събитието B. Тогава всевъзможните изходи са m, а благоприятните за сбъдване на A са k. Затова

$$P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot$$

В) Общ случай. Тогава по определение се приема , че

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot \tag{3.3}$$

3.3 Вероятност на произведение

Ако $P(B) > 0$, то от (3.3) следва формулата

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \tag{3.4}$$

Аналогично, ако $P(A) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A). \tag{3.5}$$

Ако $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$, то $P(A \cap B) = 0$.

Формулите (3.4) и (3.5) означават, че при пресмятането на вероятността на произведението на две събития вероятността на едното събитие се умножава с условната вероятност на другото събитие.

3.4 Независими събития

Определение 3.2. *Казваме, че събитията A и B са* **независими**, *ако*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{3.6}$$

В сила са следните теореми.

Теорема 3.1. *Нека $P(B) > 0$. Събитията A и B са независими тогава и само тогава, когато $P(A|B) = P(A)$.*

Теорема 3.2. *Нека $P(A) > 0$. Събитията A и B са независими тогава и само тогава, когато $P(B|A) = P(B)$.*

Теоремите означават, че ако събитията A и B са независими, то техните условни вероятности съвпадат с безусловните и това оправдава използването на понятието „независими събития". От друга страна, определянето на това понятие чрез формула (3.6) е за предпочитане, понеже в нея събитията A и B участват равноправно и не се налагат условията $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$.

Ще отбележим и следната теорема.

Теорема 3.3. *Ако събитията A и B са независими, то събитията $\overline{A}$ и B също са независими.*

Следствие 3.1. *Ако в една от двойките $(A, B), (\overline{A}, B), (A, \overline{B}), (\overline{A}, \overline{B})$ събитията са независими, то и в останалите двойки събитията са независими.*

3.5 Вероятност на сума на взаимно независими събития

Определение 3.3. *Случайните събития $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се наричат* **взаимно независими***, ако за всеки набор $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ на k от тези събития $(2 \leq k \leq n)$ е изпълнено*

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cdots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}).$$

Теорема 3.4. *Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са взаимно независими събития. Тогава*

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_k)). \tag{3.7}$$

Забележка 3.1. *За събитията A, B, C и $n = 2, 3$ горната формула в разгърнат вид изглежда така:*

$$P(A \cup B) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)),$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)).$$

Пример 3.2. *Известна е вероятността p да се улучи „6" при едно теглене: $p = 1/13\,983\,816$. Каква е вероятността p_1 да се улучи поне една „6" с една комбинация при двете тегления на Спорт Тото $6/49$?*

Да означим събитията: $A = \{$*поне една „6" от двете тегления*$\}$, $A_k = \{$*„6" от* k *-то теглене*$\}$, $k = 1, 2$. *Тогава* $A = A_1 \cup A_2$ *и понеже* A_1 *и* A_2 *са взаимно независими, то*

$$p_1 = P(A) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - (1-p)(1-p) = 2p - p^2 \approx 2p\,.$$

Пример 3.3. *Прибор се състои от* 2 *блока. Блоковете излизат от строя случайно и независимо един от друг. Означаваме събитията:* A *– приборът работи;* A_1 *– блок* 1 *работи;* A_2 *– блок* 2 *работи. Нека* $P(A_1) = p_1$ *и* $P(A_2) = p_2$.

Да се намери вероятността $P(A)$ *в случаите:*

А) Приборът работи, когато и двата блока работят;

Б) Приборът работи, когато поне един блок работи.

Решение:

А) Имаме, че $A = A_1 \cap A_2$ *и* A_1, A_2 *са независими. Тогава съгласно* (3.6)

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 p_2\,.$$

Б) Имаме, че $A = A_1 \cup A_2$ *и* A_1, A_2 *са независими. Тогава по формула* (3.7) *с* $n = 2$ *получаваме*

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)\,.$$

В горния пример са решени двете най-прости задачи от теорията на надеждността – задачите за намиране на надеждността (вероятността за безотказна работа) p на сложно изделие (прибор), ако са известни надеждностите p_1 и p_2 на двете му съставни части (блокове), в случаите, когато съставните части са свързани последователно (фиг. 3.1a) и когато са свързани паралелно (фиг. 3.1b).

В горния пример получихме, че:

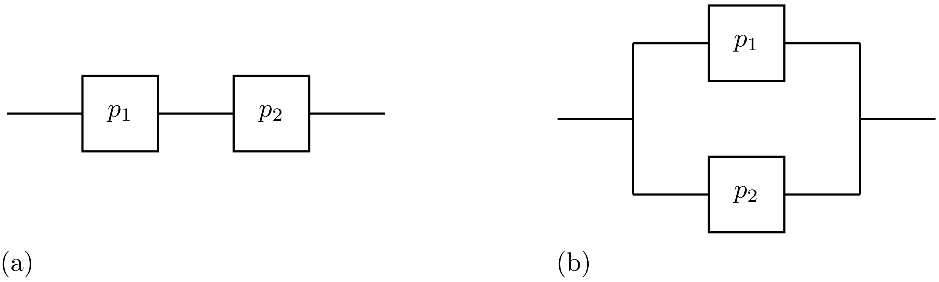
А) при последователно свързване

$$p = p_1 p_2; \tag{3.8}$$

Б) при паралелно свързване

$$p = 1 - (1-p_1)(1-p_2). \tag{3.9}$$

В теорията на надеждността сложното изделие се нарича „система", а съставните части – „подсистеми".



Фиг. 3.1: Последователно (a) и паралелно (b) свързване

Нека се търси надеждността p на система, състояща се от n подсистеми, които имат надеждности $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Ако подсистемите са свързани последователно (системата работи, когато всички подсистеми работят), надеждността на системата се пресмята по формулата

$$p = p_1 p_2 \cdots p_n. \tag{3.10}$$

Ако подсистемите са свързани паралелно (системата работи, когато поне една подсистема работи), надеждността на системата се пресмята по формулата

$$p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n). \tag{3.11}$$

В частния случай, когато $n = 3$, $p_1 = p_2 = p_3 = 0.9$ получаваме, че при последователно свързване надеждността на системата намалява ($p = 0.9^3 = 0.729$), а при паралелно свързване надеждността на системата нараства ($p = 1 - 0.1^3 = 0.999$). Затова в системи, които трябва да функционират с висока надеждност (космически кораби, самолети, животоподдържаща медицинска апаратура и др.) се използва паралелно свързване на няколко подсистеми – една основна и $2 - 3$ резервни.

3.6 Формула за пълната вероятност

Определение 3.4. *Случайните събития $H_1, H_2, \ldots, H_n$ се наричат* **хипотези**, *ако:*

1) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *образуват пълна група от несъвместими събития;*

2) $P(H_k) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Теорема 3.5. *Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ са хипотези и A е случайно събитие. Тогава*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A|H_k)\,. \tag{3.12}$$

Формула (3.12) се нарича **формула за пълната вероятност**. В разгърнат вид тя изглежда така

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)\,. \tag{3.13}$$

Забележка 3.2. *За да приложим формулата за пълната вероятност трябва да намерим n вероятности за хипотезите $P(H_k)$ и съответните n условни вероятности $P(A|H_k)$. Често пъти тяхното пресмятане е много по-лесно от непосредственото намиране на $P(A)$. Това обяснява голямото приложение на формула (3.12).*

Забележка 3.3. *Преди окончателното прилагане на формулата за пълната вероятност се препоръчва да се провери дали пресметнатите вероятности $P(H_k)$ за хипотезите удовлетворяват равенството*

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1, \tag{3.14}$$

което е задължително за хипотезите H_k. Ако равенство (3.14) е нарушено, то или някоя от вероятностите $P(H_k)$ е пресметната грешно, или е пропусната някоя хипотеза.

3.7 Преоценка на хипотези. Формула на Бейс

Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ са хипотези и вероятностите $P(H_k) > 0, k = 1, 2, \dots, n$ са известни. Нека при опита се е сбъднало събитието A. При тази информация възниква въпросът за **преоценка на хипотезите** H_k, т.е. за намиране на вероятностите $P(H_k|A)$. Имаме, че

$$P(A \cap H_k) = P(A)P(H_k|A) = P(H_k)P(A|H_k),$$

откъдето получаваме

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}\,. \tag{3.15}$$

Формула (3.15) се нарича **формула на Бейс**[1].

Много често в математическата литература като формула на Бейс се посочва формулата

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}\,, \tag{3.16}$$

която следва непосредствено от (3.15) и (3.12).

Ние ще предпочетем формула (3.15), защото по-лесно се помни и защото при преоценка на хипотези първо се намира $P(A)$ по формулата за пълната вероятност (3.12), след което $k-$та хипотеза H_k се преоценява, като $k-$то произведение $P(H_k)P(A|H_k)$ в сумата на (3.12) се дели на цялата сума $P(A)$. Накрая ще отбележим, че винаги

$$\sum_{k=1}^{n} P(H_k|A) = 1\,.$$

Пример 3.4. *В 3 кутии (I, II и III) има топки за тенис (нови и стари): в кутия I има 2 нови и 1 стара, в кутия II – 3 нови и 2 стари, а в кутия III – 4 нови и 2 стари. Случайно избрана топка се оказала нова.*

Какви са вероятностите топката да е взета: от кутия I; – от кутия II; – от кутия III?

Решение: Означаваме събитията: A – топката е нова; H_1 – топката е взета от кутия I; H_2 – топката е взета от кутия II; H_3 – топката е взета от кутия III. Имаме, че:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{1}{3}\,, \qquad P(A|H_1) = \frac{2}{3}\,; \\ P(H_2) &= \frac{1}{3}\,, \qquad P(A|H_2) = \frac{3}{5}\,; \\ P(H_3) &= \frac{1}{3}\,, \qquad P(A|H_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\,\cdot \end{aligned}$$

Тогава по формулата за пълната вероятност имаме

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{45} + \frac{9}{45} + \frac{10}{45} = \frac{29}{45}$$

и като приложим формулата на Бейс получаваме, че:

$$P(H_1|A) = \frac{10/45}{29/45} = \frac{10}{29}\,, \quad P(H_2|A) = \frac{9}{29}\,, \quad P(H_3|A) = \frac{10}{29}\,\cdot$$

[1]Бейс (Bayes) Томас (1702 – 1761) – английски математик

3.8 Задачи

3.1. Хвърлят се k зара. Каква е вероятността сумата от точките да е равна на: а) k; б) $k+1$?

3.2. В партида от 15 детайла има 5 негодни. За проверка по случаен начин се избират 3 детайла. Партидата се бракува, ако сред избраните детайли има поне един негоден детайл. Каква е вероятността за това?

3.3. Притежател на карта за банкомат е забравил четирицифрения код. Каква е вероятността да набере по случаен начин верния код, ако има право да направи три опита?

3.4. От цифрите $1, 2, 3$ по случаен начин е съставено шестцифрено число. Каква е вероятността в това число цифрата 1 да се среща 1 път, цифрата 2 – 2 пъти, цифрата 3 – 3 пъти?

3.5. От цифрите $1, 2, 3$ по случаен начин е съставено шестцифрено число. Каква е вероятността, че ще се получи четно число, съдържащо само една цифра 2?

3.6. В хотел има 6 едноместни стаи, за които има 10 претенденти: 6 мъже и 4 жени. Стаите се заемат по реда на пристигане. Всички претенденти пристигат в хотела в случаен ред. Каква е вероятността, че стаите ще получат:

а) всичките 6 мъже;

б) 4 мъже и 2 жени;

в) поне една от четирите жени?

3.7. Студент е подготвил 20 от всичките 25 изпитни въпроса. На изпита студентът изтегля случайно 5 въпроса. Каква е вероятността той да си вземе изпита, ако за това е достатъчно да отговори правилно на поне 3 от изтеглените въпроси?

3.8. В джоба има 5 монети по 50 ст., 4 монети по 10 ст. и 1 монета по 5 ст. Каква е вероятността, че сумата на три случайно избрани монети не превишава един лев?

3.9. Двама души подред хвърлят монета. Печели този, който пръв хвърли „герб”. Каква е вероятността за печалба на всеки от играчите?

3.10. Три радиостанции, независимо една от друга, изпращат на самолет един и същ сигнал. Вероятностите, че от самолета ще приемат тези сигнали са съответно $0.9, 0.8, 0.75$. Каква е вероятността, че от самолета ще приемат сигнала?

3.11. Хвърля се зар, докато се паднат 6 точки. Каква е вероятността, че ще бъдат направени поне три хвърляния?

3.12. От кошница с 3 червени и 7 зелени ябълки изваждат подред всичките ябълки. Каква е вероятността втората извадена ябълка да е червена?

3.13. От кошница с 3 червени и 7 зелени ябълки изваждат подред всичките ябълки, освен една. Каква е вероятността тази ябълка да е зелена?

3.14. Трима ловци стрелят по веднъж по една и съща цел. Първият улучва целта с вероятност 0.8, вторият – с вероятност 0.7, а третият – 0.6.

а) Каква е вероятността поне един от тях да улучи целта?.

б) Каква е вероятността само един да улучи?

в) Каква е вероятността двама от тях да улучат?

г) Каква е вероятността и тримата да улучат?

д) Каква е вероятността нито един да не улучи?

3.15. От колода с 52 карти е изтеглена една карта. Намерете вероятностите на следните събития:

а) изтеглената карта е „пика "($\spadesuit$);

б) изтеглената карта е „дама" (Q)

в) изтеглената карта е „дама пика" ($Q\spadesuit$)

г) изтеглената карта е „дама" (Q) или „пика "($\spadesuit$).

3.16. Двама лекари преглеждат един и същ пациент независимо един от друг. Първият лекар поставя вярна диагноза с вероятност 0.8, а вторият – с вероятност 0.6. Намерете вероятностите на следните събития:

а) двамата поставят вярна диагноза;

б) двамата поставят погрешна диагноза;

в) поне един поставя вярна диагноза;

г) само един поставя вярна диагноза.

3.17. Три оръдия правят единичен залп по цел. Вероятността да се улучи целта при един изстрел за първото оръдие е 0.5, за второто – 0.6, а за третото – 0.7. Каква е вероятността за поразяване на целта, ако за това са достатъчни две попадения?

3.18. Има 5 урни. В две от тях има по 1 бяла и 3 черни топки, а в три урни – по 2 бели и по 2 черни топки. Случайно се избира една от урните и от нея се изважда една топка. Каква е вероятността топката да е бяла?

3.19. В група от 20 ловци има 4 отлични, 10 добри и 6 посредствени стрелци, които улучват целта при един изстрел съответно с вероятности

$0.9, 0.7$ и 0.5. Случайно избрани двама ловци правят по един изстрел по целта. Каква е вероятността и двамата да улучат?

3.20. След прегледа лекарят счита, че са равновъзможни заболяванията B и C. За уточняване на диагнозата, на болния е направен анализ, който дава положителна реакция при заболяването B в 30% от случаите, а при заболяването C – в 20% от случаите. Анализът е дал положителна реакция. Кое от заболяванията е станало по-вероятно?

3.21. Един от трима стрелци стреля два пъти по цел. Вероятностите за улучване на целта от първия, втория и третия стрелец са съответно $0.3, 0.5$ и 0.8. Целта е поразена. Намерете вероятността, че е стрелял: а) първият стрелец: б) вторият стрелец; в) третият стрелец?

3.22. В група от 20 стрелци има 4 отлични, 10 добри и 6 посредствени стрелци, които улучват целта при един изстрел съответно с вероятности $0.9, 0.7$ и 0.5. Случайно избран стрелец прави два изстрела по целта. Отбелязано е едно попадение. Каква е вероятността, че стрелецът е бил: а) отличен; б) добър; в) посредствен?

3.23. Конспектът за изпит съдържа 20 въпроса. В изпитния билет има два различни въпроса, които са избрани по случаен начин от конспекта. Студент е подготвил 15 въпроса. Каква е вероятността да си вземе изпита, ако за това е достатъчно да отговори правилно или на двата въпроса от избрания билет, или на един въпрос от билета и на един допълнителен въпрос по избор на преподавателя от останалите въпроси на конспекта?

3.24. В кошница има 3 червени и 7 зелени ябълки.

а) От кошницата е извадена една ябълка. Каква е вероятността тя да е червена?

б) От кошницата е извадена една ябълка, която се оказала зелена. От кошницата с останалите ябълки е извадена втора ябълка. Каква е вероятността тя да е червена?

в) От кошницата са извадени (без връщане) две ябълки. Какви са вероятностите ябълките да са: 1) 2 червени; 2) 1 червена и 1 зелена; 3) 2 зелени? Какви са вероятностите за тези събития, ако извадката е с връщане?