Глава 4

Многократни опити

4.1 Редица от независими опити. Схема на Бернули

Нека са проведени n опита, всеки от които има k изхода:

1– ви опит с изходи $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1k}$;
2– ри опит с изходи $E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2k}$;
....
i– ти опит с изходи $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{ik}$;
....
n- ти опит с изходи $E_{n1}, E_{n2}, \ldots, E_{nk}$.

Предполагаме, че изходите на всеки опит образуват пълна група от несъвместими събития и в резултат на опита се сбъдва едно и само едно от тези събития. Тогава

$$P(E_{i1}) + P(E_{i2}) + \cdots + P(E_{ik}) = 1 \qquad \text{за всяко } \; i = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Ще казваме, че имаме **редица от n независими опита с k изхода**, ако

$$P(E_{ij}) = p_j \quad \text{за всяко } \; i = 1, \ldots, n \text{ и всяко фиксирано } \; j = 1, \ldots, k\,,$$

т.е. вероятността $P(E_{ij})$ не зависи от номера на опита i, а зависи само от номера на изхода j. В този случай,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1\,. \tag{4.2}$$

Пример 4.1. *При хвърляне на зар имаме редица от независими опити с* $k = 6$ *изхода.*

Пример 4.2. *При стрелба по мишена с кръгове за точки от* 1 *до* 10 *изходите са* $k = 11$*. Защо?*

Определение 4.1. *Ще казваме, че имаме* **опити (изпитания) по схемата на Бернули**[1]*, ако се провеждат независими опити с* $k = 2$ *изхода.*

Примери:

- Хвърляне на монета с изходи: лице, герб;
- Стрелба по цел с изходи: улучил, неулучил;
- Серийно производство на детайли с изходи: годен, негоден;
- Излюпване на пилета в инкубатор с изходи: излюпено, неизлюпено.

Забележка 4.1. *Не е задължително опитите да се извършват един след друг, т.е. възможно е опитите да се извършат едновременно както е в последния пример. Съществено важното при провеждане на опити по схемата на Бернули е, че всички опити се провеждат при едни и същи условия и вероятностите за сбъдване на двата изхода остават неизменни.*

В общия случай, при опитите по схемата на Бернули са възможни $k = 2$ изхода: A и $\overline{A}$. При сбъдване на събитието A казваме, че опитът е **успешен (имаме успех)**, а при сбъдване на събитието $\overline{A}$ казваме, че опитът е **неуспешен (имаме неуспех)**. Вероятностите $p = P(A)$ и $q = P(\overline{A})$ се наричат съответно **вероятност за успех** и **вероятност за неуспех**. От (4.2) следва, че задължително

$$p + q = 1\,. \tag{4.3}$$

[1]Берну̀ли (Bernoulli) Якоб (1654–1705) – швейцарски математик

4.2 Вероятност $P_n(m)$

Нека са проведени n опита по схемата на Бернули с вероятност за успех при един опит равна на p. Означаваме с $P_n(m)$ вероятността за m успеха при тези n опита, където $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Доказано е, че

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) се нарича **формула на Бернули**.

Вероятностите $P_n(m)$ имат следните свойства:

1) **Сума на** $P_n(m)$**.**
В сила е равенството

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1\,. \tag{4.5}$$

Вероятностно доказателство:

Събитията $H_m = \{m \text{ успеха при } n \text{ опита}\},\ m = 0, 1, 2, \ldots, n$ образуват пълна група от несъвместими събития. Затова

$$\sum_{m=0}^{n} P(H_m) = 1,$$

откъдето следва (4.5), понеже $P(H_m) = P_n(m)$.
Комбинаторно доказателство:

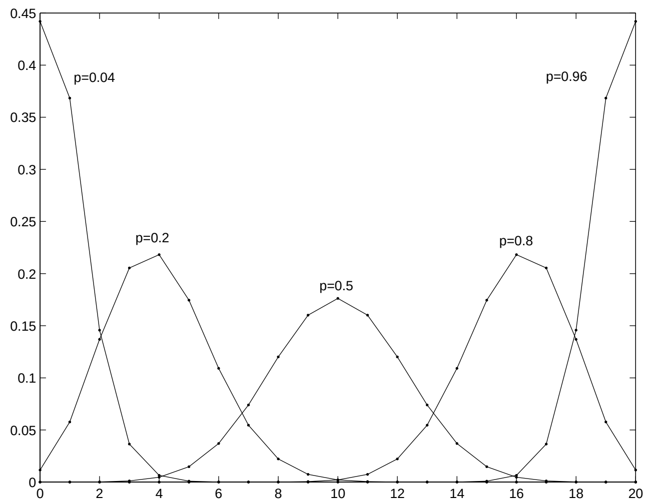
$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1\,.$$

2) **Максимална стойност на** $P_n(m)$**.**
Вероятността $P_n(m)$ приема максимална стойност при $m = m_0$, за което

$$np - q \le m_0 \le np + p\,. \tag{4.6}$$

Понеже разликата между числата $np + p$ и $np - q$ е равна на 1, то са възможни следните два случая:

А) $m_1 = np - q$ не е цяло число. Тогава $m_2 = np + p$ също не е цяло и между тези две числа има само едно цяло число $m = m_0$ и $P_n(m)$ има максимална стойност $P_n(m_0)$. При това, $P_n(m)$ нараства, когато m се изменя от 0 до m_0 и намалява, когато m се изменя от m_0 до n.



Фиг. 4.1: Зависимост на $P_n(m)$ от p.

Б) $m_1 = np - q$ е цяло число. Тогава $m_2 = np + p$ също е цяло и $P_n(m)$ има две равни максимални стойности: $P_n(m_1) = P_n(m_2)$. При това, $P_n(m)$ нараства, когато m се изменя от 0 до m_1 и намалява, когато m се изменя от m_2 до n.

3) **Зависимост на** $P_n(m)$ **от** p**.**
Нека в равнина Oxy нанесем точките с координати $(m, P_n(m))$ и ги съединим последователно с отсечки (фиг. 4.1).

При $p = 1/2$ получената графика има камбановидна форма и е симетрична относно правата $x = n/2$.

При $p < 1/2$ симетричността на графиката се нарушава и се намалява интервалът на нарастване на $P_n(m)$. Когато p стане достатъчно малко ($np < q$), този интервал изчезва, $P_n(m)$ има максимална стойност $P_n(0)$ и $P_n(m)$ намалява, когато m се изменя от 0 до n.

При нарастването на $p > 1/2$ картината се променя аналогично. Когато p стане достатъчно голямо ($nq < p$), интервалът на намаляване изчезва, $P_n(m)$ има максимална стойност $P_n(n)$ и $P_n(m)$ нараства, когато m се изменя от 0 до n.

4.3 Приближени формули за $P_n(m)$

Необходимостта от приближени формули за пресмятане на $P_n(m)$ проличава от следния пример.

Пример 4.3. *При серийно производство на даден детайл вероятността да се произведе дефектен детайл е* 0.001. *Произведени са* 9000 *детайла. Да се намерят вероятностите на събитията:*

а) A=\{*дефектните детайли са точно* 8\};

б) B=\{*броят на дефектните детайли е между* 6 *и* 15 *включително*\}.

Решение:

а) Проведени са $n = 9000$ *независими опита да се произведе дефектен детайл с вероятност за успех при един опит* $p = 0.001$ *и вероятност за неуспех* $q = 0.999$. *Търсим вероятността за* $m = 8$ *успеха при* $n = 9000$ *опита, т.е.*

$$P(A) = P_{9000}(8) = C_{9000}^{8} 0.001^{8} 0.999^{8992}. \tag{4.7}$$

б) Търсим вероятността броят на успехите да е между 6 *и* 15 *включително, т.е.*

$$P(B) = P(6 \leq m \leq 15) = \sum_{m=6}^{15} P_{9000}(m) = \sum_{m=6}^{15} C_{9000}^{m} 0.001^{m} 0.999^{9000-m}. \tag{4.8}$$

Пресмятането на вероятностите от формулите (4.7) и (4.8) е трудно дори с калкулатор. Изчисленията на подобни вероятности се усложняват при големи n и малки p. Приближени формули, които облекчават тези пресмятания, са намерени от Лаплас[2], Моавър[3] и Поасон[4].

А) **Формули на Моавър–Лаплас.**

В сила е следната **локална формула на Моавър–Лаплас**:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}. \tag{4.9}$$

Редът на пресмятане по формула (4.9) е следният:

---

[2]Лапла̀с (Laplace) Пиер Симон (1749–1827) – френски математик, физик, астроном

[3]Моа̀вър (Moivre) Абрахам де (1667–1754) – английски математик

[4]Поасо̀н (Poisson) Симеон Дьони (1781–1840) – френски математик, физик

– Пресмята се np;
– Пресмята се npq;
– Пресмята се $\sqrt{npq}$;
– Пресмята се $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$;
– Определя се $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;
– Пресмята се $P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$.

Ще отбележим, че функцията $\varphi(x)$ е четна и е зададена таблично (Таблица 2, стр. 210).

В сила е следната **интегрална формула на Моавър–Лаплас**:

$$P(a \le m \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{4.10}$$

където m е броят на успешните опити и

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

е **функцията на Лаплас (интеграл на вероятностите)**, която е зададена таблично (Таблица 3, стр. 211) и има следните свойства:

1) $\Phi(0) = 0$;
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т.е. $\Phi(x)$ е нечетна функция;
3) $\Phi(x)$ е растяща функция и $\Phi(+\infty) = 0.5$.

Така например $\Phi(3) = 0.49865$, а $\Phi(5) = 0.4999997$. Обикновено в таблиците x се изменя от 0 до 3 със стъпка 0.01.

Забележка 4.2. *При фиксирано p точността на формулите* (4.9) *и* (4.10) *се увеличава с нарастването на n. Ако n е „голямо” и фиксирано, точността на формула* (4.9) *се влошава с намаляването на p, докато точността на формула* (4.10) *се влияе по-слабо от това.*

Б) **Формула на Поасон.** Когато p е малко или по-точно, когато

$$np \approx npq \approx \lambda, \tag{4.11}$$

е по-добре вместо локалната формула на Моавър–Лаплас да се прилага следната **формула на Поасон**:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\,. \tag{4.12}$$

В Таблица 1, стр. 209 са дадени стойностите на $\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ при

$$\lambda = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12.$$

В горния пример $np \approx npq \approx 9$ и за намирането на приближените стойности на търсените вероятности е по-добре да приложим формулата на Поасон с $\lambda = 9$. Имаме, че

$$P_{9000}(8) \approx \frac{9^8}{8!}e^{-9} = 0.13176,$$

$$\begin{aligned}P(6 \le m \le 15) \approx \sum_{m=6}^{15} \frac{9^m}{m!}e^{-9} = \\ &= 0.09109 + 0.11712 + 0.13176 + 0.13176 + 0.11858 + \\ &+ 0.09702 + 0.07276 + 0.05038 + 0.03238 + 0.01943 = 0.86228.\end{aligned}$$

За сравнение нека приложим и формулите на Моавър–Лаплас. Имаме, че $\sqrt{npq} = 3$,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8-9}{3} = -\frac{1}{3} \approx -0.33, \quad \varphi(-0.33) = \varphi(0.33) = 0.3778.$$

Тогава, като използваме Таблици 2 и 3, получаваме

$$P_{9000}(8) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0.3778}{3} = 0.1259;$$

$$\begin{aligned}P(6 \le m \le 15) &\approx \Phi\left(\frac{15-9}{3}\right) - \Phi\left(\frac{6-9}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) + \Phi(1) = 0.4772 + 0.3413 = 0.8185.\end{aligned}$$

4.4 Урнова схема

Много конкретни задачи за намиране на вероятности могат да се впишат в следната **урнова схема**:

В урна има n_1 бели и n_2 черни топки. От урната са извадени m топки $1 \leq m \leq n_1 + n_2 = n$. Редът на изваждане на топките е без значение. Търси се вероятността за сбъдване на събитието

$$A = \{\text{извадени са } m_1 \text{ бели и } m_2 \text{ черни топки}\},$$

където $0 \leq m_1 \leq n_1,\ 0 \leq m_2 \leq n_2,\ m_1 + m_2 = m$.

Решението на задачата съществено зависи от това дали изваждането на топките става без връщане или с връщане.

Извадка без връщане. В този случай възможните изходи от опита са всички ненаредени извадки без връщане с обем m, направени от генерална съвкупност с обем $n = n_1 + n_2$, а това са всичките комбинации от n елемента $m-$ти клас. Техният брой е равен на

$$C_n^m = C_{n_1+n_2}^{m_1+m_2}.$$

Благоприятните извадки са тези, при които m_1 топки са избрани от n_1 бели топки в урната и m_2 топки са избрани от n_2 черни топки в урната. Такъв избор може да стане по

$$C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2}$$

начина. Следователно

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2}}{C_{n_1+n_2}^{m_1+m_2}} \cdot \tag{4.13}$$

Извадка с връщане. В този случай, при изваждането на всяка поредна топка, съставът на топките в урната остава непроменен. Непроменени остават и вероятностите да се извади бяла (черна) топка:

$$p = P(\text{бяла}) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}\,,\ q = P(\text{черна}) = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \cdot \tag{4.14}$$

На практика са направени m независими опита да се извади бяла топка с вероятност за успех при един опит, равна на p. Търси се вероятността m_1 от тези опити да са успешни. По формулата на Бернули

$$P(A) = P_m(m_1) = C_{m_1+m_2}^{m_1} p^{m_1} q^{m_2}, \tag{4.15}$$

където p и q са пресметнати по формула (4.14).

Пример 4.4. *От урна, съдържаща* 6 *бели и* 4 *черни топки, са извадени* 5 *топки. Каква е вероятността* $P(A)$ *две от тях да са бели?*

Съгласно направените по-горе означения

$$n_1 = 6,\ n_2 = 4,\ m = 5,\ m_1 = 2,\ m_2 = 5 - 2 = 3.$$

Ако извадката е без връщане, то по формула (4.13) *имаме, че*

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{15 \cdot 4}{252} = \frac{5}{21} \cdot$$

Ако извадката е с връщане, то по формули (4.14) *и* (4.15) *имаме, че* $p = \dfrac{6}{6+4} = 0.6,\ q = \dfrac{4}{6+4} = 0.4$ *и тогава*

$$P(A) = P_5(2) = C_5^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3 = 10 \cdot 0.36 \cdot 0.064 = 0.2304.$$

4.5 Задачи

4.1. Нека са направени n опита, при всеки от които събитието A се сбъдва с вероятност p (опитът е успешен) и не се сбъдва с вероятност $q = 1 - p$ (опитът е неуспешен). Докажете, че:

а) P(всички опити са успешни)$= p^n$;

б) P(поне един опит е неуспешен)$= 1 - p^n$;

в) P(всички опити са неуспешни)$= q^n$;

г) P(поне един опит е успешен)$= 1 - q^n$;

д) P(поне k опита са успешни)$= \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$;

е) P(не повече от k опита са успешни)$= \sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m q^{n-m}$;

ж) $P(k_1 \leq$ брой на успешните опити $\leq k_2)$$= \sum_{m=k_1}^{k_2} C_n^m p^m q^{n-m}$;

з) Нека p_1 $(0 < p_1 < 1)$ е дадена вероятност и n е минималният брой опити, при които събитието A настъпва поне веднъж с вероятност не по-малка от p_1. Тогава

$$n \geq \frac{\lg(1 - p_1)}{\lg(1 - p)} \cdot$$

4.2. Лекар преглежда последователно три различни пациенти, като при всеки преглед поставя вярна диагноза с вероятност $p = 0.6$. Намерете вероятностите на следните събития:

а) $A = \{$три верни диагнози$\}$;

б) $B = \{$нито една вярна диагноза$\}$;

в) $C = \{$една вярна диагноза$\}$;
г) $D = \{$поне една вярна диагноза$\}$;
д) $E = \{$поне една невярна диагноза$\}$;
е) $F = \{$две верни диагнози$\}$;
ж) $G = \{$поне две верни диагнози$\}$;
з) $H = \{$не повече от две верни диагнози$\}$.

4.3. Стрелец попада в целта при всеки изстрел с вероятност $p = 0.8$. Направени са $n = 100$ изстрела по целта. Каква е вероятността за точно 76 попадения? Кой е най-вероятният брой на успешните изстрели и каква е съответната вероятност? Каква е вероятността броят на попаденията да е между 75 и 85 включително?

4.4. Вероятността един принтер да блокира при отпечатването на една страница е $p = 0.001$. На този принтер предстои да се отпечатат $n = 2000$ страници. Определете:

а) каква е вероятността принтерът да не блокира нито веднъж?

б) каква е вероятността принтерът да блокира поне веднъж?

в) каква е вероятността принтерът да блокира точно един път?

г) каква е вероятността принтерът да блокира повече от един път?

д) какъв е най-вероятният брой на блокирания на принтера и каква е съответната вероятност?

4.5. Зар се хвърля пет пъти. Намерете вероятностите $P_5(k)$ за всички възможни появявания на шестицата ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

4.6. Зар се хвърля десет пъти. Каква е вероятността шестицата да се падне: а) точно два пъти; б) точно пет пъти; в) точно осем пъти?

4.7. Статистически е установено, че на всеки 1000 новородени деца 485 са момичета, а останалите са момчета. В едно семейство има пет деца. Каква е вероятността три от тях да са момичета?

4.8. Известно е, че 2% от изделията са дефектни. Контрольор проверява десет произволно взети изделия. Намерете вероятностите на събитията:

а) всички изделия са годни;

б) всички изделия са дефектни;

в) броят на годните изделия е не по-малък от четири;

г) броят на годните изделия е между четири и осем включително.

4.9. Партида от детайлите, произведени в един цех, постъпва за качествен контрол. Известно е, че 5% от тези детайли са нестандартни. Колко детайла най-малко трябва да се проверят, че с вероятност не по-малка от 0.95 да се открие нестандартен детайл?