Глава 5

Случайни величини. Закони за разпределение

5.1 Примери за случайни величини

В теорията на вероятностите има много случаи, в които резултатът на даден опит се изразява с някакво число X. Преди опита са известни стойностите, които може да приеме числото X, но стойността на X се определя едва след провеждането на опита. Тъй като изходът на опита има случаен характер, то и числото X е случайно; това означава, че при повтаряне на опита то се променя по непредвидим начин. Ще дадем няколко примера:

1. Хвърляме монета 3 пъти: $X-$ брой на попаденията „герб".
   $X \in \{0, 1, 2, 3\}$;

2. Хвърляме зар 1 път: $X-$ брой на падналите се точки.
   $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

3. Разполагаме с 5 патрона и стреляме до първо попадение: $X-$ брой на неизразходваните патрони. $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

4. Хвърляме монета, докато падне „герб": $X-$ брой на направените опити. $X \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$;

5. Измерване: $X-$ резултат от измерване. $X \in [a, b]$;

6. Измерване: $X-$ грешка от измерване. $X \in [\alpha, \beta]$.

За да се обединят всички подобни примери в обща схема, се въвежда понятието случайна величина (с.в.).

Определение 5.1. ***Случайна величина****, свързана с даден опит, се нарича величина, чиято стойност се определя след провеждането на опита и зависи от неговия изход.*

И така,

$$X = X(\omega), \text{ където } \omega \in \Omega \text{ е изходът на опита.}$$

Дадена случайна величина се нарича **дискретна**, ако приема крайно или изброимо множество от стойности. Такива са случайните величини от примерите $1, 2, 3, 4$. Случайните величини от примерите 5 и 6 не са дискретни, понеже могат да приемат произволни стойности в числен интервал, който не е изброимо множество.

Закон за разпределение се нарича всяка зависимост, която дава възможност да се пресметне вероятността за попадение на случайната величина в даден интервал. Да разгледаме законите за разпределение, които се използват при изследването на случайните величини.

5.2 Таблица на разпределение на дискретна случайна величина

Дадена дискретна случайна величина X се описва напълно със своята **таблица на разпределение**, която има вида

Таблица 5.1

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

където числата $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ са възможните стойности, които може да приема X, а числата $p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ са вероятностите, с които X приема тези стойности. Понеже събитията $\{X = x_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ образуват пълна група от несъвместими събития, то задължително

$$\sum_k p_k = 1\,. \tag{5.1}$$

Вероятността за попадение на дискретна с.в. X в даден интервал $< \alpha, \beta >$ се пресмята по формулата

$$P(X \in < \alpha, \beta >) = \sum_{x_k \in < \alpha, \beta >} p_k \,, \tag{5.2}$$

където в сумата участват тези p_k, за които $x_k \in < \alpha, \beta >$.

Пример 5.1. *Хвърляме монета 3 пъти и X е броят на попаденията „герб". $X \in \{0, 1, 2, 3\}$. Направени са $n = 3$ независими опита по схемата на Бернули с $p = P(\text{герб}) = 1/2$ и $q = P(\text{лице}) = 1/2$.*

Имаме, че

$$p_k = P(X = k) = P_3(k) = C_3^k p^k q^{3-k} = C_3^k \Big(\frac{1}{2}\Big)^k \Big(\frac{1}{2}\Big)^{3-k} = C_3^k \Big(\frac{1}{2}\Big)^3 = \frac{C_3^k}{8} \cdot$$

Тогава таблицата на разпределение има вида

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

и

$$P(X \in (1, 3]) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot$$

Забележка 5.1. *Ако X не е дискретна случайна величина, то вероятността $P(X = x)$ не носи информация за тази случайна величина. Така например, ако X е координатата на случайно избрана точка от интервала $[0, 1]$ и вероятността за попадение на тази точка в подинтервал $\Delta \subset [0, 1]$ е равна на*

$$P(X \in \Delta) = \frac{L(\Delta)}{L([0, 1])} = L(\Delta) \,,$$

то

$$P(X = x) = L([x, x]) = |x - x| = 0 \,.$$

Ето защо, за подобни случайни величини ще въведем и използваме закон за разпределение от друг вид. Преди това обаче ще разгледаме свойствата на т.нар. функция на разпределение (ф.р.), която е закон за разпределение от най-общ вид и се определя за всички случайни величини.

5.3 Функция на разпределение

Определение 5.2. *Функцията*

$$F(x) = P(X < x), \quad -\infty < x < +\infty$$

се нарича ***функция на разпределение*** *на случайната величина* X.

Функцията на разпределение има следните свойства:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(x)$ е ненамаляваща функция в интервала $(-\infty, +\infty)$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
4. $F(x)$ е непрекъсната отляво за всяко x.

Коментари:

- Свойство 1 е очевидно, понеже $F(x)$ е вероятност.
- Свойствата $2, 3$ и 4 са определящи за една ф.р. в смисъл, че ако една функция $F(x)$ има свойствата $2, 3, 4$, то тя е ф.р. на някаква случайна величина.
- Свойство 3 следва след граничен преход в $F(x)$ при $x \to \pm\infty$ и от факта, че събитието $\{X \le +\infty\}$ е сигурно, а събитието $\{X \le -\infty\}$ е невъзможно:

$$F(+\infty) = P(X \le +\infty) = 1, \qquad F(-\infty) = P(X \le -\infty) = 0\,.$$

- Доказателството на свойствата 2 и 4 се основава на равенството

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2) \quad \text{при} \;\; x_1 < x_2\,. \tag{5.3}$$

  Равенство (5.3) следва от зависимостта

$$\{X < x_2\} = \{X < x_1\} \cup \{x_1 \le X < x_2\},$$

  в която събитията от дясната част са несъвместими. Тогава получаваме, че

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)\,,$$

  с което (5.3) е доказано.

- Понеже $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, то от (5.3) следва, че $F(x_1) \le F(x_2)$, което означава, че $F(x)$ е ненамаляваща функция.

- За да докажем свойство 4, избираме $x < x_0$. Тогава от (5.3) имаме

$$F(x_0) = F(x) + P(x \le X < x_0)$$

и след граничен преход при $x \to x_0^-$ получаваме, че

$$F(x_0) = F(x_0^-) + P(x_0 \le X < x_0)\,.$$

Понеже събитието $\{x_0 \le X < x_0\}$ е невъзможно, то

$$P(x_0 \le X < x_0) = 0$$

и затова

$$F(x_0) = F(x_0^-) \quad \text{за всяко} \;\; x_0\,.$$

Това означава, че $F(x)$ е непрекъсната отляво за всяко x_0. Тогава $F(x)$ е непрекъсната в точката x_0 тогава и само тогава, когато

$$F(x_0^+) = F(x_0),$$

т.е., когато $F(x)$ е непрекъсната отдясно в точката x_0. От (5.3) следва, че при $x_0 < x$

$$F(x) = F(x_0) + P(x_0 \le X < x)$$

и след граничен преход при $x \to x_0^+$ получаваме, че

$$F(x_0^+) = F(x_0) + P(x_0 \le X \le x_0)\,,$$

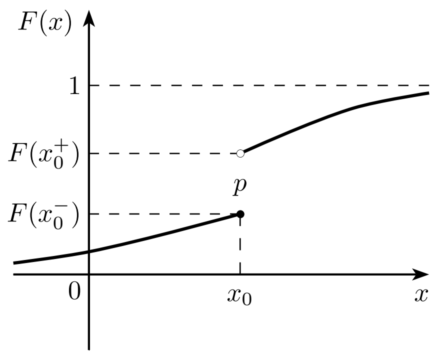
т.е.

$$F(x_0^+) = F(x_0) + P(X = x_0)\,.$$

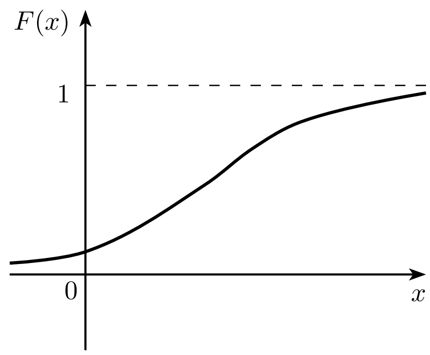
Следователно $F(x)$ е непрекъсната в точката x_0 тогава и само тогава, когато

$$P(X = x_0) = 0\,. \tag{5.4}$$

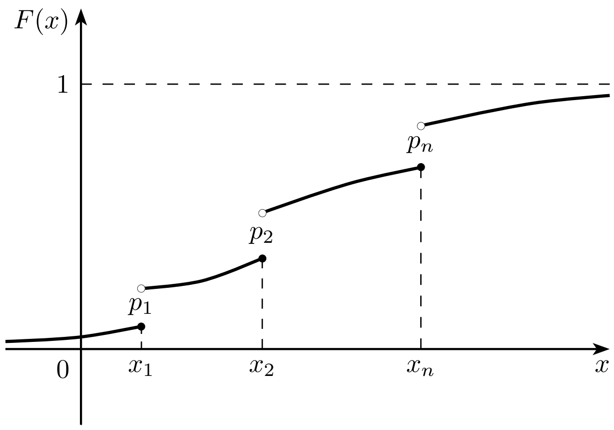
Ако условие (5.4) е нарушено и $P(X = x_0) = p > 0$, то функцията $F(x)$ има прекъсване от първи род в точката x_0 със скок $F(x_0^+) - F(x_0^-) = p$ (фиг. 5.1). От свойствата $1-4$ следва, че в общия случай една ф.р. $F(x)$



Фиг. 5.1: $P(X = x_0) = p > 0$



Фиг. 5.2: $F(x)$ е непрекъсната



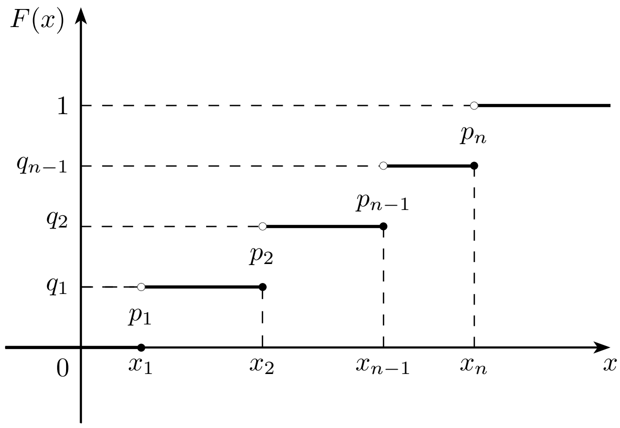
Фиг. 5.3: Графика на $F(x)$ в общия случай

има графика от вида, показан на фиг. 5.3, където точките на прекъсване от първи род $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ са крайно или изброимо множество.

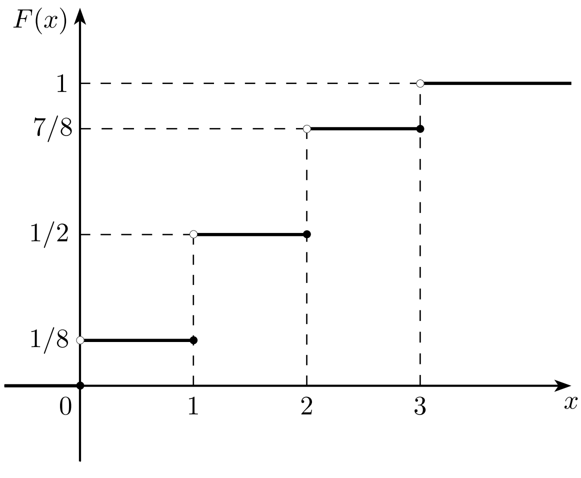
Ако $P(X = x) = 0$ за всяко x, то ф.р. $F(x)$ е непрекъсната за всяко x и нейната графика е както на фиг. 5.2.

Ако случайната величина X е дискретна с таблица на разпределение (таблица 5.1), то нейната ф.р. $F(x)$ има прекъсване от първи род в точките $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ със съответни скокове $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$. Понеже сумата на тези скокове е равна на 1 (съгласно формула (5.1)), то ф.р. $F(x)$ не може да има нарастване в никой от интервалите на непрекъснатост

$$(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, +\infty),$$



Фиг. 5.4: $F(x)$ е стъпаловидна: $q_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$



Фиг. 5.5: Графика на $F(x)$ от пример 5.1

тъй като в противен случай ще трябва да приеме стойности извън интервала $[0,1]$, което е невъзможно според свойство 1. Затова графиката на ф.р. на дискретна случайна величина е стъпаловидна (фиг. 5.4). Така например, графиката на ф.р. на случайната величина от пример 5.1 има вида от фиг. 5.5, където за по-голяма яснота мащабите по осите x и F са избрани различни.

От (5.3) следват формулите за пресмятане на вероятността за попадение на случайна величина X в даден интервал:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{5.5}$$
$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) + P(X = \beta), \tag{5.6}$$
$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) - P(X = \alpha), \tag{5.7}$$
$$P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) + P(X = \beta) - P(X = \alpha). \tag{5.8}$$

5.4 Плътност на разпределение на непрекъсната случайна величина

Дадена случайна величина X се нарича **непрекъсната**, ако нейната функция на разпределение $F(x)$ е непрекъсната за всяко x, т.е., ако

$$P(X = x) = 0 \text{ за всяко } x.$$

Тогава формулите (5.5) – (5.8) може да се обединят в една формула

$$P(X \in <\alpha, \beta>) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{5.9}$$

която е валидна за интервал $<\alpha, \beta>$ от произволен вид.

Определение 5.3. *Казва се, че непрекъснатата случайната величина X е разпределена с някаква плътност, ако съществува неотрицателна непрекъсната по части функция $p(x)$ такава, че за всяко x*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt\,. \tag{5.10}$$

*Функцията $p(x)$ се нарича **плътност на разпределение** (**п.р.**) на случайната величина X.*

Понеже $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, то плътността на разпределение удовлетворява условието

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1\,, \tag{5.11}$$

което е аналог на условието (5.1) за дискретните случайни величини.

От (5.10) следва, че ако $F(x)$ е диференцуема в точката x, то

$$F'(x) = p(x)\,. \tag{5.12}$$

Освен това, от (5.9) и (5.10) заключаваме, че

$$P(X \in <\alpha, \beta>) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx\,. \tag{5.13}$$

Пример 5.2. *Нека избираме по случаен начин точка от интервала $[a, b]$ и случайната величина X е координатата на тази точка. Нека вероятността за попадение на избраната точка в даден подинтервал Δ на интервала $[a, b]$ зависи от дължината L на този подинтервал:*

$$P(X \in \Delta) = \frac{L(\Delta)}{b-a}\,\cdot$$

Да намерим ф.р. и п.р. на случайната величина X.

Нека $x < a$. Понеже $a \leq X$, то събитието $\{X < x\}$ е невъзможно и $F(x) = P(X < x) = 0$.

Нека $a \leq x \leq b$. Тогава $F(x) = P(X < x) = P(X \in [a, x)) = \dfrac{x-a}{b-a}\cdot$

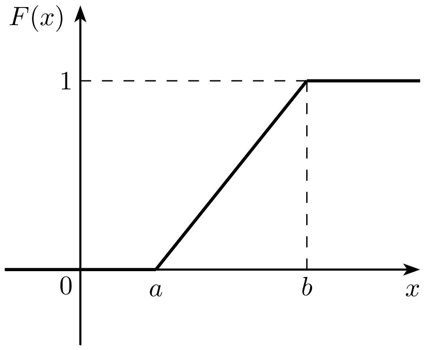
Нека $b < x$. Понеже $X \leq b$, то събитието $\{X < x\}$ е сигурно и $F(x) = P(X < x) = 1$. И така,

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ако } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}\,, & \text{ако } a \leq x \leq b, \\ 1\,, & \text{ако } x > b. \end{cases} \tag{5.14}$$

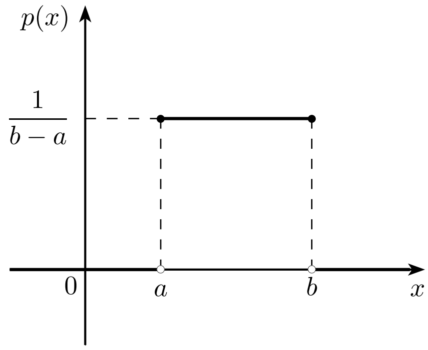
Като диференцираме $F(x)$, получаваме плътността на разпределение на случайната величина X:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\,, & \text{ако } x \in [a, b], \\ 0\,, & \text{ако } x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{5.15}$$

Графиките на $F(x)$ и $p(x)$ са дадени на фиг. 5.6 и фиг. 5.7.



Фиг. 5.6: Графика на $F(x)$



Фиг. 5.7: Графика на $p(x)$

5.5 Задачи

5.1. Случайната величина X има таблица на разпределение

X	-3	1	2	4
P	0.1	0.4	0.3	0.2

Намерете $P(X \in [1,3])$ и постройте графиката на функцията на разпределение $F(x)$.

5.2. Случайната величина X има функция на разпределение

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

Намерете плътността на разпределение $p(x)$ и вероятността случайната величина X да попадне в интервала $[-1,1]$.

5.3. Ловец има пет патрона и стреля по цел до първо попадение или докато не свърши патроните. Намерете таблицата на разпределение на случайната величина $X-$ „брой на изразходваните патрони”, ако при всеки изстрел ловецът улучва целта с вероятност 0.25.

5.4. Случайната величина X има плътност на разпределение

$$p(x) = \begin{cases} |1-x|\,, & \text{ако } x \in [-1,1], \\ 0\,, & \text{ако } x \notin [-1,1]. \end{cases} \tag{5.16}$$

Намерете функцията на разпределение $F(x)$ и $P(X \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])$.