Глава 6

Числени характеристики на случайни величини

Изчерпваща характеристика на една случайна величина е нейният закон за разпределение като функция на разпределение, таблица на разпределение, плътност на разпределение. В много задачи, обаче, не е нужно да знаем целия закон за разпределение, а е достатъчно да знаем едно или няколко числа, които отразяват най-важните особености на случайната величина. Това са т.нар. **числени характеристики** (ч.х.) на случайната величина. От различните числени характеристики, които се използват в теорията на вероятностите, най-важни са: математическо очакване, дисперсия и стандартно отклонение.

6.1 Математическо очакване

Математическото очакване на случайна величина X е число EX, около което се колебае X при провеждането на опитите, при които тя приема своите стойности, т.е. EX може да се разглежда като средна стойност, около която се колебаят стойностите на случайната величина X. За да се ориентираме как да пресмятаме тази средна стойност, първо ще разгледаме случая, когато случайната величина е дискретна.

А) Нека случайната величина X е дискретна и е зададена със своята таблица за разпределение

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_m

Ще напомним, че

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1\,. \tag{6.1}$$

Нека са проведени n опита, при които случайната величина X:

n_1 пъти приема стойност x_1,

n_2 пъти приема стойност x_2,

. . . . . .

n_m пъти приема стойност x_m,

където

$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n\,.$

Средното аритметично на всичките стойности, които е приела случайната величина X, е равно на

$$X_{\text{средно}} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_m n_m}{n}$$

или

$$X_{\text{средно}} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \cdots + x_m \frac{n_m}{n}\,.$$

Дробта n_1/n е честотата, с която се е появявала стойността x_1 и с увеличаването на n тази дроб се приближава към $p_1 = P(X = x_1)$. Аналогично n_2/n се приближава към p_2 и т.н. n_m/n се приближава към p_m. И така, с увеличаването на n величината $X_{\text{средно}}$ се приближава към числото $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_m p_m$.

Определение 6.1. ***Математическо очакване*** *на дискретната случайна величина X се нарича числото*

$$EX = \sum_k x_k p_k, \tag{6.2}$$

Забележка 6.1. *В математическата литература понякога вместо термина „математическо очакване” се среща термина „средна стойност” или вместо означението EX се използва означението MX.*

Б) Нека случайната величина X е непрекъсната и има плътност на разпределение $p(x)$.

Определение 6.2. ***Математическо очакване*** *на непрекъснатата случайна величина X се нарича числото*

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx\,. \tag{6.3}$$

В) Общ случай: X е зададена с функцията на разпределение $F(x)$.

Тогава математическото очакване EX може да се пресметне с т.нар. **интеграл на Стилтес**[1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dF(x) \,.$$

Без да даваме строго определение на интеграла на Стилтес ще отбележим само, че ако $\varphi(x)$ е непрекъсната функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dF(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k \varphi(x_k) p_k, & \text{ако } X \text{ е дискретна,} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) p(x) dx, & \text{ако } X \text{ е непрекъсната.} \end{cases} \tag{6.4}$$

Тогава от формула (6.4) с $\varphi(x) = x$ следва, че

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k x_k p_k, & \text{ако } X \text{ е дискретна,} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, & \text{ако } X \text{ е непрекъсната.} \end{cases} \tag{6.5}$$

6.2 Свойства на EX

1. $EC = C$, ако C е константа. По-точно, $EX = C$, ако $X = C$ с вероятност $P = 1$.
2. $E(\lambda X) = \lambda EX$, където λ е константа (не е случайна величина).
3. $E(X + Y) = EX + EY$.
4. $E(XY) = EX \cdot EY$, ако с.в. X и Y са независими, т.е., ако събитията $\{X < \alpha\}$ и $\{Y < \beta\}$ са независими за всяко α и β.
5. $E\varphi(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dF(x)$, ако $\varphi(x)$ е непрекъсната функция.

[1] Стѝлтес (Stieltjes) Томас (1856–1894) – холандски математик

6.3 Дисперсия и стандартно отклонение

Нека с.в. X има крайно математическо очакване $EX = m$.

Определение 6.3. ***Дисперсия*** *на с.в. X се нарича числото*

$$DX = E(X-m)^2.$$

От свойство 5 на математическото очакване EX с функция $\varphi(x) = (x-m)^2$ следва,че

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 dF(x)\,.$$

Тогава

$$DX = \sum_k (x_k - m)^2 p_k, \qquad \text{ако } X \text{ е дискретна,} \tag{6.6}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p(x) dx, \qquad \text{ако } X \text{ е непрекъсната.} \tag{6.7}$$

6.4 Свойства на DX

1. $DC = 0$, ако C е константа. По-точно, $DX = 0$ само, ако $X = C$ с вероятност $P = 1$.
2. $D(\lambda X) = \lambda^2 DX$, ако λ е константа (не е случайна величина).
3. $D(X+Y) = DX + DY$, ако с.в. X и Y са независими.
4. В сила е формулата
$$DX = EX^2 - (EX)^2\,. \tag{6.8}$$

Доказателство на формула (6.8): Нека $EX = m$. Тогава

$$\begin{aligned} DX &= E(X-m)^2 = E(X^2 - 2mX + m^2) \\ &= EX^2 - 2mEX + Em^2 = EX^2 - 2mm + m^2 = EX^2 - m^2. \end{aligned}$$

Забележка 6.2. *Формула* (6.8) *е удобна за прилагане, когато с.в. X е дискретна.*

Дисперсията представлява мярка за разсейването (отклонението) на с.в. X от математическото ѝ очакване m. Очевидно, една такава мярка трябва да зависи от отклонението $Y = X - m$. Но Y е случайна величина и не може да служи за числена характеристика. Математическото очакване EY също не е подходящо за целта, понеже $EY = EX - Em = m - m = 0$ за всяка с.в. X поради това, че при сумирането (интегрирането) положителните и отрицателните отклонения взаимно се неутрализират. Ето защо, отклонението трябва да се вземе по абсолютна стойност и след това да се търси математическото очакване на получената с.в., т.е. като средно отклонение може да се вземе числото $E|X - m|$, което е неотрицателно и може да стане равно на 0 само, ако $X = const.$ с вероятност $P = 1$. Неговото пресмятане, обаче, е трудно поради наличието на абсолютна стойност. Затова като мярка за отклонение се избира числото

$$DX = E(X - m)^2, \tag{6.9}$$

което се пресмята по-лесно, също е неотрицателно и може да стане 0 само, ако $X = const.$ с вероятност $P = 1$. За да се компенсира „изкривяването" на мярката за отклонение поради повдигането на квадрат в (6.9), в теорията на вероятностите се използва и следната мярка за отклонение на с.в. X от математическото ѝ очакване $EX = m$

$$\sigma_X = \sqrt{DX}, \tag{6.10}$$

която се нарича **стандартно отклонение (средноквадратично отклонение)**.

Ще отбележим, че размерностите на DX и X са различни ($[DX] = [X]^2$), докато размерностите на σ_X и X са еднакви ($[\sigma_X] = [X]$). Затова е за предпочитане като мярка за отклонението на с.в. X от математическото ѝ очакване $EX = m$ да се използва стандартното отклонение σ_X.

6.5 Примери за пресмятане на EX, DX и σ_X

А) Хвърляме монета 4 пъти с вероятност да се падне „герб" при едно хвърляне $p = \frac{1}{2}$. X е броят на попаденията „герб". X приема стойности $k = 0, 1, 2, 3, 4$ с вероятности

$$p_k = P(X = k) = P_4(k) = C_4^k \Big(\frac{1}{2}\Big)^k \Big(\frac{1}{2}\Big)^{4-k} = \frac{C_4^k}{16}\,.$$

Следователно X има следната таблица на разпределение

X	0	1	2	3	4
P	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Тогава

$$EX = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{4}{16} + 2\cdot\frac{6}{16} + 3\cdot\frac{4}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{4+12+12+4}{16} = 2\,,$$

$$EX^2 = 0^2\cdot\frac{1}{16} + 1^2\cdot\frac{4}{16} + 2^2\cdot\frac{6}{16} + 3^2\cdot\frac{4}{16} + 4^2\cdot\frac{1}{16} = \frac{4+24+36+16}{16} = 5$$

и съгласно формули (6.8) и (6.10) получаваме: $DX = 5-2^2 = 1, \quad \sigma_X = 1.$

Б) Случайната величина X е равномерно разпределена в интервала $[a, b]$, т.е. има плътност на разпределение

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\,, & \text{ако } x \in [a,b], \\ 0\,, & \text{ако } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Като отчетем формула (6.3), получаваме, че

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{b} + \int_{b}^{+\infty} \\ &= \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}\,, \end{aligned}$$

т.е.

$$EX = \frac{a+b}{2}\,\cdot \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} DX &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p(x)dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx \\ &= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}\,, \end{aligned}$$

т.е.

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{6.12}$$

и

$$\sigma_X = \frac{|b-a|}{\sqrt{12}}\,\cdot \tag{6.13}$$