Глава 7

Някои често срещани разпределения

I. ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

7.1 Разпределение на Бернули

Нека $p \in [0, 1]$.

Определение 7.1. *Дискретната с.в. X има* ***разпределение на Бернули*** *с параметър p, ако приема стойности 1 и 0 с вероятности p и $q = 1 - p$, т.е. има таблица на разпределение*

X	0	1
P	q	p

Имаме, че

$$EX = p, \quad DX = pq. \tag{7.1}$$

Тълкуване: Провежда се опит с вероятност за сбъдване на събитието A (вероятност за успех), равна на p. Тогава $X = 1$, ако опитът е успешен и $X = 0$, ако е неуспешен.

7.2 Биномно разпределение

Нека $n \geq 1$ е цяло число, $p \in [0, 1]$ и $q = 1 - p$.

Определение 7.2. *Дискретната с.в. X има* ***биномно разпределение*** *с параметри n, p, ако приема стойности $0, 1, \dots, m, \dots, n$ с вероятности*

$$p_m = P(X = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}\,.$$

Имаме, че $X = X_1 + \cdots + X_n$, където $X_k,\ k = 1, \dots, n$ са независими случайни величини, които имат разпределение на Бернули и $EX_k = p,\ DX_k = pq,\ k = 1, \dots, n$. Тогава от свойство 3 на EX и DX следва, че

$$EX = np, \quad DX = npq, \quad \sigma_X = \sqrt{npq}. \tag{7.2}$$

Тълкуване: Провеждат се n опита по схемата на Бернули с вероятност p за успех при един опит. Тогава броят на успешните опити X е случайна величина, която има биномно разпределение с параметри n, p.

7.3 Разпределение на Поасон

Нека $\lambda > 0$.

Определение 7.3. *Дискретната с.в. X има* ***разпределение на Поасон*** *с параметър λ, ако приема стойности $0, 1, \dots, m, \dots$ с вероятности*

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}\,.$$

Имаме, че

$$EX = \lambda, \quad DX = \lambda, \quad \sigma_X = \sqrt{\lambda}. \tag{7.3}$$

Коментар:

- Понеже $DX = EX$, то с.в. X, имаща разпределение на Поасон, е безразмерна величина.
- Ако дискретната случайна величина X е безразмерна, приема неотрицателни цели стойности и от статистическия анализ имаме, че $EX \approx DX \approx \lambda$, то може да се подложи на проверка хипотезата, че X има разпределение на Поасон с параметър λ.
- Разпределението на Поасон се използва и като приближение на биномно разпределена случайна величина с параметри n, p в случая, когато $np \approx npq \approx \lambda$. Тогава

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}\,.$$

Случайни величини, които имат разпределение на Поасон, се срещат често в теорията на масовото обслужване, теорията на надеждността, теорията на управление на запасите, биологията, физиката и др.

Типични примери за случайни величини, имащи разпределение на Поасон са следните:

– брой на космически частици, които попадат през определен период от време върху повърхнината на датчик за регистриране на такива частици;

– брой на телефонните повиквания, постъпващи за определено време в телефонна централа;

– брой на нишките, които са се скъсали на тъкачен стан за определено време:

– брой на атомите на радиоактивно вещество, които са претърпели радиоактивен разпад през определен период от време;

– брой на електроните, излитащи от нагретия катод на електронна лампа през определен период от време;

– брой на отказите, настъпили за определен период от време при работата на някаква апаратура, машина, агрегат.

7.4 Геометрично разпределение

Нека $p \in (0,1)$.

Определение 7.4. *Дискретната с.в.* X *има* ***геометрично разпределение*** *с параметър* p*, ако приема стойности* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *с вероятности*

$$p_n = P(X = n) = (1-p)^{n-1}p\,.$$

Имаме, че

$$EX = \frac{1}{p}\,, \quad DX = \frac{1-p}{p^2}\,, \quad \sigma_X = \frac{\sqrt{1-p}}{p}\,. \tag{7.4}$$

Тълкуване: Провежда се редица от независими опити с вероятност за успех при един опит p. Тогава номерът X на първия успешен опит е случайна величина, която има геометрично разпределение.

7.5 Хипергеометрично разпределение

Нека целите числа $n_1 \geq 0, n_2 \geq 0$ и $n \geq 0$ са такива, че $n \leq n_1 + n_2 = N$ и

$$k_1 = \max(0, n - n_2), \quad k_2 = \min(n_1, n).$$

Определение 7.5. *Дискретната с.в. X има **хипергеометрично разпределение**, ако приема стойности $k_1, k_1 + 1, \ldots, k_2$ с вероятности*

$$p_k = P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}, \quad k_1 \leq k \leq k_2. \tag{7.5}$$

Хипергеометричното разпределение се среща в опити за избор на n топки от урна, съдържаща $N = n_1 + n_2$ топки, от които n_1 са бели и n_2 са черни (вж. Урнова схема).

Типичен пример за случайна величина, имаща хипергеометрично разпределение, е броят X на дефектните изделия при качествен контрол. Партидата от N изделия съдържа n_1 дефектни и $n_2 = N - n_1$ годни изделия. Качественият контрол не е в състояние да провери всички изделия за годност и не знае колко е n_1. Той избира за проверка n изделия $(0 < n < N)$, сред които открива $X = k$ дефектни $(k_1 \leq k \leq k_2)$. Тогава вероятността да настъпи събитието $\{X = k\}$ се задава с формула (7.5). Имаме, че

$$EX = \frac{n_1 n}{N}, \quad DX = \frac{n_1 n(N - n_1)(N - n)}{N^2(N - 1)} \cdot \tag{7.6}$$

Понеже средният брой на дефектните изделия в направената извадка е $\overline{k} \approx EX$, то

$$\frac{\overline{k}}{n} \approx \frac{n_1}{N} \cdot \tag{7.7}$$

Формула (7.7) се използва за оценка на един от параметрите, участващи в нея, ако са известни другите три.

Пример 7.1. *Броят n_1 на бракуваните изделия в партидата се оценява по формулата*

$$n_1 \approx \frac{\overline{k} N}{n} \cdot$$

Пример 7.2. *В рибарник се прави пробен улов на риба. Уловените k риби се маркират и се връщат обратно. След няколко дена се прави нов* *улов и сред уловените n риби са преброени n_1 маркирани. Тогава броят на рибите в рибарника приблизително е равен на*

$$N \approx \frac{n_1 n}{k} \cdot$$

II. НЕПРЕКЪСНАТИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

7.6 Равномерно разпределение

Нека $a < b$.

Определение 7.6. *Непрекъснатата с.в. X се нарича* **равномерно разпределена в интервала** $[a, b]$*, ако има плътност на разпределение*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\,, & \textit{ако } x \in [a, b], \\ 0\,, & \textit{ако } x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{7.8}$$

Функцията на разпределение на такава случайна величина е

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ако } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}\,, & \text{ако } a \le x \le b, \\ 1\,, & \text{ако } x > b. \end{cases} \tag{7.9}$$

Имаме, че

$$EX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}\,, \quad \sigma_X = \frac{|b-a|}{\sqrt{12}} \cdot \tag{7.10}$$

Равномерно разпределените случайни величини намират приложение:

- в задачи от геометрична вероятност;
- за формиране на непрекъсната с.в. Y с помощта на с.в. X, която е равномерно разпределена в интервала $(0, 1)$ и се получава на компютър със стандартна програма „генератор на случайни числа”.

7.7 Експоненциално (показателно) разпределение

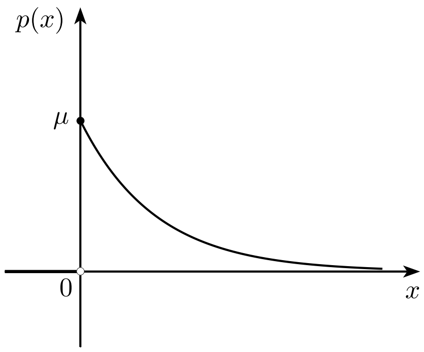
Нека $\mu > 0$.

Определение 7.7. *Непрекъснатата с.в. X се нарича* ***експоненциално разпределена с параметър*** *μ, ако има плътност на разпределение*

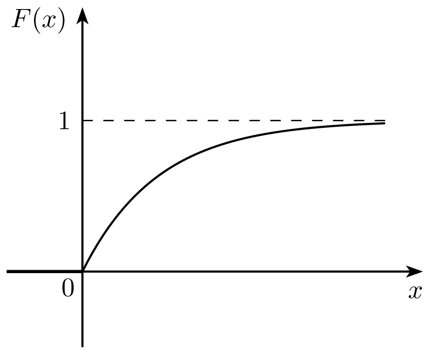
$$p(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ако } x < 0, \\ \mu e^{-\mu x}\,, & \text{ако } x \geq 0. \end{cases} \tag{7.11}$$

Функцията на разпределение на такава случайна величина е

$$Fx) = \begin{cases} 0\,, & \text{ако } x < 0, \\ 1 - e^{-\mu x}\,, & \text{ако } x \geq 0. \end{cases} \tag{7.12}$$



Фиг. 7.1: Графика на $p(x)$



Фиг. 7.2: Графика на $F(x)$

Имаме, че

$$EX = \frac{1}{\mu}, \quad DX = \frac{1}{\mu^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\mu}\,\cdot \tag{7.13}$$

Забележка 7.1. *Ако X е неотрицателна непрекъсната случайна величина и при статистическия анализ е получена оценка $EX \approx \sigma_X \approx m$, то може да се подложи на проверка хипотезата, че X има експоненциално разпределение с параметър $\mu = 1/m$.*

Експоненциално разпределени случайни величини се срещат в приложни задачи на теорията на масовото обслужване, теорията на надеждността, теорията на управление на запасите.

Някои типични примери на случайни величини с експоненциално разпределение за следните:
– продължителност на телефонен разговор;
– време на безотказна работа на радиоапаратура;
– време на обслужване в магазин, бензиностанция, пристанище;
– продължителност на ремонт на телевизор в телевизионна база.

7.8 Нормално разпределение (Закон на Гаус)

Нека $\sigma > 0$.

Определение 7.8. *Непрекъснатата с.в.* X *се нарича* ***нормално разпределена с параметри*** m ***и*** σ *, ако има плътност на разпределение*

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} . \tag{7.14}$$

Записът $X = N(m, \sigma)$ означава, че X има нормално разпределение с параметри m и σ. Тогава имаме, че

$$EX = m, \quad DX = \sigma^2, \quad \sigma_X = \sigma . \tag{7.15}$$

Когато $X = N(0, 1)$, казваме, че X има **стандартно нормално разпределение**. Тогава плътността на разпределение има вида

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}} .$$

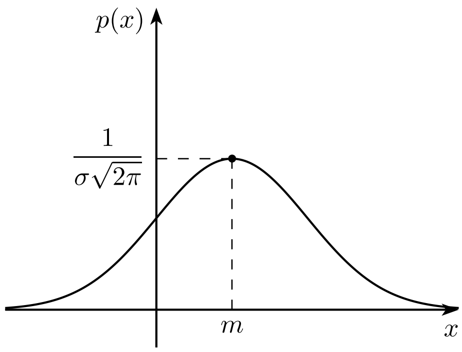
А) Свойства на плътността:

- $p_{\max} = p(m) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
- $p(x)$ е растяща в интервала $(-\infty, 0)$, намаляваща е в интервала $(0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = 0$.

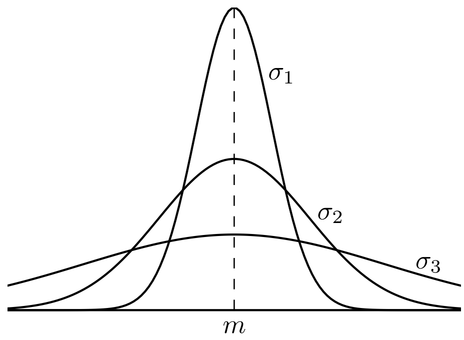
- Графиката на $p(x)$ е симетрична относно правата $x = m$.

  От тези свойства следва, че графиката на $p(x)$ има „камбановидна" форма, която е показана на фиг. 7.3.

- Графики на $p(x)$ при различни σ са показани са на фиг. 7.4. Когато σ намалява, „височината на камбаната" се увеличава, а частите на графиката в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ стават по-стръмни.



Фиг. 7.3: Графика на $p(x)$



Фиг. 7.4: $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

Б) Функция на разпределение.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \left(\frac{t-m}{\sigma} = z \right) = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} = \frac{1}{2} + \int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\,.$$

Тогава

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \tag{7.16}$$

където

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{7.17}$$

е функцията на Лаплас, която е зададена в таблично (Таблица 3) и има следните свойства:

1. $\Phi(x)$ е нечетна;
2. $\Phi(0) = 0, \quad \Phi(+\infty) = 0.5;$
3. $\Phi(3) = 0.49865, \quad \Phi(5) = 0.4999997.$

В) Вероятност за попадение в интервала $< a, b >$.

Като отчетем (7.16), получаваме, че

$$P(X \in < a, b >) = F(b) - F(a) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Тогава

$$P(X \in < a, b >) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \tag{7.18}$$

Г) Правило на „трите сигми" (3σ).

$$\begin{aligned} P(|X-m| < 3\sigma) &= P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) \\ &= \Phi\left(\frac{m+3\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-3\sigma-m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.49865 = 0.9973\,. \end{aligned}$$

Така получихме формулата

$$P(|X-m| < 3\sigma) = 0.9973, \tag{7.19}$$

която се нарича **правило на „трите сигми"** и показва, че с вероятност, близка до единица (0,9973), нормално разпределена случайна величина приема стойности в интервала $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$.

Д) Нормиране: Ако $X = N(m, \sigma)$, то $X_0 = \dfrac{X-m}{\sigma} = N(0,1)$.

Обратно, ако $X_0 = N(0,1)$ и $X = \sigma X_0 + m \;\; (\sigma > 0)$, то $X = N(m, \sigma)$.

Е) Приложения на нормалното разпределение:

- При големи n биномно разпределена с.в. X се апроксимира с нормално разпределена случайна величина, за която $m = EX = np$ и $\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{npq}$:

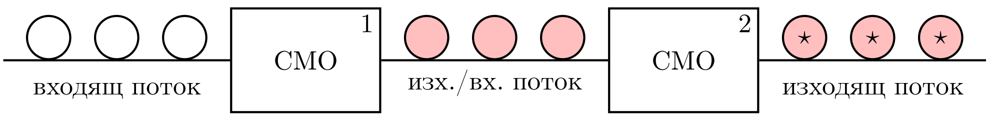
$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\dfrac{(k-np)^2}{2npq}}, \tag{7.20}$$

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{7.21}$$

- Примери за нормално разпределени случайни величини са:
  - Грешката при измерване;
  - Разстоянието от попадението до целта;
  - Параметрите на детайли при серийно производство;
  - Параметрите на хора от една и съща възраст и пол;
- Обяснение на факта за голямото разпространение на нормално разпределените случайни величини се дава от централната гранична теорема (вж. раздел 8.8).

7.9 Приложение в теорията на масовото обслужване на разпределението на Поасон и експоненциалното разпределение

Обект на изследване на теорията на масовото обслужване[1] (ТМО) са системите за масово обслужване (СМО).



В СМО постъпва **входящ поток** от **заявки (клиенти)**, които образуват **опашка** от чакащи за обслужване:

• опашка в бръснарница;

• опашка от купувачи пред касата в магазина;

• кораби на рейд пред пристанище, чакащи разрешение за влизане в пристанището;

• самолети на летище, чакащи разрешение за излитане;

• повредени телевизори, чакащи за ремонт;

• заявки за телефонен разговор, постъпили в телефонна централа;

• върнати книги в библиотека, чакащи подреждане по рафтовете.

[1] или „теория на опашките”

Основна характеристика на входящия поток е вероятността $P_n(t)$, че за време t в системата ще постъпят n заявки. В ТМО най-често се предполага, че потокът от заявки е **прост (Поасонов)**, като

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Понеже $EX(t) = \lambda t$, то λt е средният брой заявки, постъпили за време t, т.е. λ е интензитетът на заявките.

Заявките, постъпили в СМО, биват обслужени:

• брадясалият е обръснат;

• купувачът плаща на касата;

• корабът влиза в пристанището и го товарят (разтоварват);

• самолетът излита;

• телевизорът е ремонтиран;

• телефонната разговор е осъществен;

• книгата е поставена на нужния рафт.

Като правило различните заявки се обслужват за различно време (например, плащането на касата). Времето за обслужване в много случаи се характеризира с вероятността $Q_1(t)$, че за време t в СМО ще бъде обслужена поне една заявка:

$$Q_1(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Тогава казваме, че имаме **експоненциално време на обслужване**. Параметърът μ характеризира средния брой заявки, обслужени за единица време.

Обслужените заявки напускат СМО и образуват изходящ поток от заявки. Изходящият поток от обслужени заявки може да образува входящ поток от заявки за обслужване в нова СМО.

Пример: поточна линия за производство.

В ТМО се разглеждат различни типове СМО, които се отличават по някои основни характеристики като:

– закон за разпределение на входящия поток от заявки;

– закон за разпределение на времето на обслужване;

– брой на местата за чакане (краен n или безкраен);

– структура на обслужването (индивидуално, групово, последователно, паралелно);

– дисциплина на опашката (ред на обслужването): „пристигналият пръв е обслужен пръв", „пристигналият последен е обслужен пръв", „случаен подбор на заявката за обслужване". Интересен е случаят на „обслужване с приоритет", когато някои от клиентите имат предимство пред останалите и биват обслужвани без чакане. Обслужването с приоритет се наблюдава например в комуникационните мрежи (телефонни, локални и глобални компютърни мрежи) и в болнични заведения за интензивно лечение.

Както споменахме, в ТМО най-често се разглеждат математически модели на СМО с Поасонов входящ поток и експоненциално време на обслужване. Пример за такава СМО е работата на телефонна централа, чийто математически модел е формулиран и изследван за пръв път от А.А. Марков[2]. Резултатите, получени за системи от такъв тип, се доказват сравнително лесно, а следствията от тях се формулират със зависимости, които могат да се използват при конкретни приложения от специалист, който не е математик.

Основната причина за разглеждането на такъв тип СМО обаче е фактът, че потоци от събития, които са Поасонови (или близки до Поасонови) се срещат много често в заобикалящия ни свят. Обяснение на този факт дава теорема, доказана от А.Я. Хинчин[3]. В реалните СМО се срещат и входящи потоци, които не са Поасонови. Затова, когато се изследва конкретна СМО, първо трябва да се направи статистическа проверка на хипотезата, че входящият поток е Поасонов. Аналогична проверка се прави и за хипотезата, че времето на обслужване е експоненциално. Ако тези статистически хипотези не бъдат отхвърлени, можем да приложим резултатите от ТМО, отнасящи се за СМО с Поасонови входящи потоци и експоненциално време на обслужване.

Методите на ТМО се прилагат и в други две вероятностни дисциплини: теорията на надеждността и теорията на управлението на запасите.

В тези теории се решават задачи, имащи широк спектър на приложение като: осигуряване на надеждно функциониране на сложни технически системи, използвани в космонавтиката, авиацията, транспорта, комуникациите, медицината, а също осигуряването на различни видове производства и обслужващи системи със суровини, материали, резервни части, медикаменти и др.

[2]Мàрков Андрей Андреевич (1856–1922) – руски математик
[3]Хѝнчин Александър Яковлевич (1894–1959) – руски математик

7.10 Задачи

7.1. Случайната величина X има математическо очакване $EX = 2.2$ и приема само две стойности $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Да се състави таблицата на разпределение на X, да се намерят дисперсията DX и стандартното отклонение σ_X и да се построи графиката на функцията на разпределение $F(x)$.

7.2. Вероятността, че при три независими изстрела стрелец ще улучи целта поне един път е равна на 0.992. Да се намерят математическото очакване и дисперсията на броя на попаденията при двадесет изстрела.

7.3. Баскетболист стреля 3 пъти по коша с вероятност за попадение при всеки от опитите $p = 0.9$. Намерете:

а) вероятността за две попадения;

б) вероятността за нито едно попадение;

в) вероятността за поне едно попадение;

г) математическото очакване и дисперсията на броя на попаденията.

7.4. В урна има 10 ключа, от които само един отключва заключена врата. Правят се последователни опити за отключване на вратата, като всеки път ключът се избира случайно от урната. Нека X е номерът на опита, при който вратата е отключена. Съставете таблицата на разпределение на случайната величина X и намерете нейното математическо очакване и дисперсия в случаите, когато след всяка проба ключът:

а) се връща обратно в урната; б) не се връща обратно в урната.

7.5. В урна има 4 бели и 6 черни топки. По случаен начин са извадени 5 топки. Нека X е броят на извадените бели топки. Съставете таблицата на разпределение и намерете математическото очакване и дисперсията на случайната величина X в случаите, когато: а) изваждането е с връщане; б) изваждането е без връщане.

7.6. Апаратура се състои от 1000 елемента, всеки от които независимо от останалите излиза от строя за време T с вероятност $p = 5 \cdot 10^{-4}$. Намерете вероятностите на следните събития:

а) $A = \{$ за време T ще откаже поне един елемент$\}$;

б) $B = \{$ за време T ще откажат точно три елемента$\}$;

в) $C = \{$ за време T ще откажат повече от три елемента$\}$.

7.7. В радиоапаратура за 10 000 часа непрекъсната работа са заменени десет радиолампи. Каква е вероятността за излизане на радиоапаратурата от строя поради дефектиране на радиолампа при 100 часа непрекъсната работа.

7.8. Върху отсечка по случаен начин са избрани n ($n \geq 2$) точки, като координатата на всяка от точките има равномерно разпределение върху отсечката. Каква е вероятността, че в лявата половина на отсечката ще попаднат най-много две точки?

7.9. Завод произвежда средно 99.8% доброкачествени изделия и 0.2% дефектни. Каква е вероятността, че сред 500 случайно избрани изделия броят на дефектните ще бъде по-голям от три?

7.10. Определете постоянната вероятност p за улучване на целта при един изстрел и броя n на направените изстрели, ако средният брой попадения е равен на 240, а стандартното отклонение на броя на попаденията е равно на 12.

7.11. От портмоне върху масата са изсипани 25 монети. Каква е вероятността, че броят на монетите, паднали се с „герб" отгоре, е между 8 и 15 включително?

7.12. Плътността на разпределение на случайната величина X се задава с функцията

$$p(x) = ae^{-\dfrac{(x-5)^2}{8}}.$$

Намерете коефициента a и определете вероятността, че в резултат на опита случайната величина X ще се отклони от математическото си очакване не повече от 1.5.

7.13. Измерва се случайна величина X, която има нормално разпределение $N(10, 5)$. Намерете симетричен относно EX интервал, в който измерената стойност попада с вероятност:

а) $p = 0.9973$; б) $p = 0.9544$; в) $p = 0.6826$.

7.14. Район с площ 400 декара е подложен на обстрел с равномерно разпределение в този район на точките на попадение на снарядите. Направени са 800 изстрела. В района има обект с площ 1 декар. Определете вероятността, че в този обект ще попаднат не по-малко от два снаряда.