# Глава 8

# Системи от случайни величини

## 8.1 Примери за системи от случайни величини

В практиката се срещат случайни величини, които приемат своите стойности при един и същ опит. Например, такива са:

- ръст и тегло на човек $(H, G)$;
- координати на попадението при стрелба $(X, Y, Z)$;
- размери на детайл $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

**Определение 8.1.** *Набор от $n$ $(n \geq 2)$ случайни величини*

$$X_1 = X_1(\omega), X_2 = X_2(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

*които получават своите стойности при един и същ опит, се нарича **система от случайни величини** или $n-$**мерна случайна величина**.*

По-нататък ще изучаваме само двумерни с.в. $(X, Y)$, като обърнем по-голямо внимание на дискретните такива.

## 8.2 Дискретна двумерна случайна величина

**Определение 8.2.** *Двумерната случайна величина $(X, Y)$ се нарича **дискретна**, ако нейните компоненти $X, Y$ приемат крайно или изброимо множество от стойности.*

Нека компонентите на двумерната случайна величина $(X, Y)$ приемат краен брой стойности

$$(x_j, y_k), \quad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n$$

и

$$p_{jk} = P(X = x_j, Y = y_k)\,.$$

**Забележка 8.1.** *Тук със записа $X = x_j, Y = y_k$ е означено събитието $\{X = x_j\} \cap \{Y = y_k\}$.*

Такава случайна величина се описва напълно от правоъгълна **съвместна таблица за разпределение** от вида

| $X\backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | | $y_k$ | | $y_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | | $p_{1k}$ | | $p_{1n}$ | $q_1$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | | $p_{2k}$ | | $p_{2n}$ | $q_2$ |
| | | | | | | | |
| $x_j$ | $p_{j1}$ | $p_{j2}$ | | $p_{jk}$ | | $p_{jn}$ | $q_j$ |
| | | | | | | | |
| $x_m$ | $p_{m1}$ | $p_{m2}$ | | $p_{mk}$ | | $p_{mn}$ | $q_m$ |
| | $r_1$ | $r_2$ | | $r_k$ | | $r_n$ | |

Понеже събитията $\{X = x_j, Y = y_k\}, \quad j = 1, \ldots, m, \ k = 1, \ldots, n$ образуват пълна група от несъвместими събития, то сумата от всички вероятности в таблицата е равна на единица:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{jk} = 1\,. \tag{8.1}$$

Освен това, от равенствата

$$\{X = x_j\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X = x_j, Y = y_k\} \text{ и } \{Y = y_k\} = \bigcup_{j=1}^{m} \{X = x_j, Y = y_k\}$$

следва, че вероятностите $q_j = P(X = x_j)$ и $r_k = P(Y = y_k)$ може да се пресметнат от съвместната таблица за разпределение по формулите

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{8.2}$$

$$r_k = \sum_{j=1}^{m} p_{jk}, \quad k = 1, \dots, n\,. \tag{8.3}$$

Ще отбележим, че при намирането на $q_j$ по формула (8.2) сумирането става по редовете на таблицата, а при намирането на $r_k$ по формула (8.3) сумирането е по стълбовете.

Формулите (8.2) и (8.3) дават възможност от съвместната таблица на разпределение на двумерната дискретна с.в. $(X, Y)$ да се намерят таблиците на разпределение на нейните компоненти – случайните величини $X$ и $Y$. Освен това, от тази таблица може да се пресметне и вероятността за попадение на точката $(X, Y)$ в дадена област $D$ от равнината $Oxy$, като се приложи формулата:

$$P((X, Y) \in D) = \sum_{(x_j, y_k) \in D} p_{jk}\,, \tag{8.4}$$

където сумирането на вероятностите $p_{jk}$ се извършва по всички клетки от таблицата, за които точката $(x_j, y_k)$ попада в областта $D$.

**Пример 8.1.** *Двумерната с.в. $(X, Y)$ е зададена със следната таблица*

| $X\backslash Y$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 0.15 | 0.10 | 0.35 |
| 1 | 0.10 | 0.20 | 0.10 |

*След сумиране на вероятностите по редовете, получаваме таблицата на разпределение на с.в. $X$:*

| $X$ | $-1$ | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.6 | 0.4 |

*След сумиране на вероятностите по стълбове, получаваме таблицата на разпределение на с.в. $Y$:*

| $Y$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.25 | 0.30 | 0.45 |

*Ако областта $D$ е правоъгълникът $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3$, то*

$$\begin{aligned} &P(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 3) \\ &\qquad = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) = 0.10 + 0.20 = 0.30\,. \end{aligned}$$

**Забележка 8.2.** *При непрекъснатите случайни величини вместо двумерна таблица на разпределение се използва плътност на разпределение* $p(x, y)$, *за която:*

- $p(x, y) \geq 0$ ;
- $\displaystyle\iint_{R\times R} p(x, y)dxdy = 1$ .
- *Ако случайните величини* $X$ *и* $Y$ *имат плътности на разпределение съответно* $p_X(x)$ *и* $p_Y(y)$, *то*

  $$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy, \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx.$$

## 8.3 Условни закони за разпределение

Нека $(X, Y)$ е дискретна с.в. и $y_k$ е една от стойностите на с.в. $Y$. Фиксираме $y_k$ и разглеждаме **условната случайна величина** $(X|Y = y_k)$, която приема стойности $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с вероятности

$$P(X = x_j|Y = y_k) = \frac{P(X = x_j, Y = y_k)}{P(Y = y_k)}\,,$$

т.е.

$$P(X = x_j|Y = y_k) = \frac{p_{jk}}{r_k} \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{8.5}$$

Нека фиксираме стойността $x_j$ на с.в. $X$ и разгледаме **условната случайна величина** $(Y|X = x_j)$, която приема стойности $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с вероятности

$$P(Y = y_k|X = x_j) = \frac{p_{jk}}{q_j} \quad k = 1, \ldots, n\,, \tag{8.6}$$

които се получават аналогично.

Ще отбележим, че намирането на вероятностите за условната случайна величина $(X|Y = y_k)$ става, като се раздели всяка от вероятностите от $k-$я стълб (където се намира $y_k$) на сумата от вероятностите на този стълб $r_k$, а при намирането на вероятностите за условната случайна величина $(Y|X = x_j)$ вероятностите от $j-$я ред (където е $x_j$) се делят на сумата от вероятностите на този ред $q_j$ .

**Пример 8.2.** *Нека двумерната с.в.* $(X, Y)$ *има съвместна таблица на разпределение*

| $X\backslash Y$ | $-2$ | $1$ | $4$ | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.12 | 0.16 | 0.32 | 0.60 |
| 3 | 0.08 | 0.20 | 0.12 | 0.40 |
| | 0.20 | 0.36 | 0.44 | |

*Тогава условната с.в.* $(Y|X=3)$ *има таблица на разпределение*

| $Y\|X=3$ | $-2$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.08/0.40 | 0.20/0.40 | 0.12/0.40 |

*т.е.*

| $Y\|X=3$ | $-2$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

*Аналогично се получава, че условната с.в.* $(X|Y=-2)$ *има таблица на разпределение*

| $X\|Y=-2$ | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.6 | 0.4 |

**Забележка 8.3.** *При непрекъснатите двумерни случайни величини условната случайна величина* $(X|Y=y)$ *има условна плътност на разпределение*

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}\,,$$

*а условната случайна величина* $(Y|X=x)$ *има условна плътност на разпределение*

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}\,.$$

## 8.4 Независими случайни величини

**Определение 8.3.** *Случайните величини* $X$ *и* $Y$ *се наричат* ***независими****, ако случайните събития* $\{X<\alpha\}$ *и* $\{Y<\beta\}$ *са независими за всяко* $\alpha$ *и* $\beta$.

**Теорема 8.1.** *Нека* $(X,Y)$ *е дискретна двумерна случайна величина.*
$X$ *и* $Y$ *са независими* $\iff p_{jk}=q_j r_k, \quad j=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n.$

**Теорема 8.2.** *Нека* $(X,Y)$ *е непрекъсната двумерна случайни величина с плътност на разпределение* $p(x,y)$.
$X$ *и* $Y$ *са независими* $\iff p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ *за всяко* $(x,y)$.

## 8.5 Моменти. Коефициент на корелация

А) Начален момент $\alpha_{r,s}$ от ред $r+s$

**Определение 8.4.** ***Начален момент*** $\alpha_{r,s}$ ***от ред*** $r+s$ *се нарича числото*

$$\alpha_{r,s} = E(X^r Y^s) = \sum_j \sum_k x_j^r y_k^s p_{jk}\,.$$

Началните моменти от 1−ви ред съвпадат с математическите очаквания на $X$ и $Y$:

$$\alpha_{1,0} = E(X^1 Y^0) = EX,$$
$$\alpha_{0,1} = E(X^0 Y^1) = EY.$$

Б) Централен момент $\mu_{r,s}$ от ред $r+s$

Случайната величина $X$ се нарича **центрирана**, ако $EX = 0$.

Ако $X$ е случайна величина, то $X_0 = X - EX$ е съответната ѝ центрирана случайна величина: $EX_0 = E(X - EX) = EX - E(EX) = 0$.

**Определение 8.5.** ***Централен момент*** $\mu_{r,s}$ ***от ред*** $r+s$ *се нарича числото*

$$\mu_{r,s} = E(X_0^r Y_0^s) = \sum_k \sum_j (x_k - EX)^r (y_j - EY)^s p_{kj}\,.$$

Лесно се проверява, че централните моменти от 1−ви ред са равни на нула: $\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0$.

Има три централните момента от 2−ри ред:

$$\mu_{2,0} = E(X_0^2 Y_0^0) = E(X - EX)^2 = DX = \sigma_X^2,$$
$$\mu_{0,2} = E(X_0^0 Y_0^2) = E(Y - EY)^2 = DY = \sigma_Y^2,$$
$$\mu_{1,1} = E(X_0^1 Y_0^1) = E(X - EX)(Y - EY) = K_{XY}.$$

**Вторият смесен централен момент** $\mu_{1,1}$ се нарича още **корелационен момент** и се бележи с $K_{XY}$. Имаме, че

$$K_{XY} = E(XY) - EX \cdot EY. \tag{8.7}$$

Величините $\sigma_X$, $\sigma_Y$ и $K_{XY}$ имат следните размерности:

$$[K_{XY}] = [X][Y], \quad [\sigma_X] = [X], \quad [\sigma_Y] = [Y].$$

Тогава величината

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{8.8}$$

е безразмерна и се нарича **коефициент на корелация**.

**Определение 8.6.** *Случайните величини $X$ и $Y$ се наричат* **некорелирани***, ако*

$$K_{XY} = 0 \quad (r_{XY} = 0).$$

Оказва се, че ако случайните величини $X$ и $Y$ са независими, то $K_{XY} = 0$, $r_{XY} = 0$, т.е. те са некорелирани. Обратното не винаги е вярно.

Освен това, коефициентът на корелация $r_{XY}$ удовлетворява неравенството

$$|r_{XY}| \leq 1 \quad (-1 \leq r_{XY} \leq 1). \tag{8.9}$$

и определя степента на линейната зависимост между $X$ и $Y$.

## 8.6 Линейна корелация

**Определение 8.7.** *Казваме, че между случайните величини $X$ и $Y$ има* ***линейна корелация****, ако съществуват константи $a \neq 0$ и $b$ , за които*

$$Y = aX + b\,. \tag{8.10}$$

Ако между случайните величини $X$ и $Y$ има линейна корелация, то $|r_{XY}| = 1$. Наистина, като отчетем (8.10), получаваме

$$EY = aEX + b, \quad DY = a^2 DX, \quad \sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2, \quad \sigma_Y = |a|\sigma_X, \quad K_{XY} = a\sigma_X^2$$

и тогава

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X \cdot |a|\sigma_X} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} \phantom{-}1, & \text{ако } a > 0, \\ -1, & \text{ако } a < 0. \end{cases}$$

Вярно е и обратното: Ако $|r_{XY}| = 1$, то между случайните величини $X$ и $Y$ има линейна корелация: $Y = aX + b$. При това,

$a > 0$, ако $r_{XY} = 1$

и

$a < 0$, ако $r_{XY} = -1$.

## 8.7 Закон за големите числа

Случайните величини приемат стойности, които обикновено зависят от голям брой причини. Поради това не може да се предвиди каква стойност ще приеме случайната величина в резултат на даден опит. Оказва се обаче, че поведението на сумата на достатъчно голям брой случайни величини при някои условия губи случайния си характер и става закономерно. Тези условия са посочени в теореми, обединени с общо название „**закони за големите числа**".

Въвеждаме означението:

$$\overline{x} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \,.$$

В сила е следната теорема на Чебишов[1].

**Теорема 8.3.** *Нека случайните величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ са две по две независими и съществува константа $c > 0$ такава, че*

$$DX_k \leq c, \quad k = 1, 2, \ldots$$

*Тогава за всяко $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k\right| < \varepsilon\right\} = 1 \,. \tag{8.11}$$

Теоремата означава, че при големи $n$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k \,. \tag{8.12}$$

Коментар: Отляво в (8.12) имаме случайна величина, а отдясно – число (неслучайна величина), т.е. при големи $n$ средното аритметично

$$\overline{x} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

губи случайния си характер.

[1] Чебишѝв (Чебышёв) (1821–1894) – руски математик

**Следствие 8.1.** *Нека* $EX_k = a, \quad k = 1, 2, \ldots$. *Тогава*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx a\,. \tag{8.13}$$

Наистина, в дясната част на (8.12)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k = \frac{1}{n}\cdot na = a\,.$$

С формула (8.13) се обосновава формулата от статистиката за оценка на математическото очакване на случайна величина $X$. Ако случайните величини $X_k$ са независими и разпределени както $X$: $EX_k = a$, то

$$EX \approx \overline{x} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\,. \tag{8.14}$$

**Следствие 8.2** (**Теорема на Бернули**). *Нека $m$ е броят на сбъдване на събитието $A$ при $n$ опита по схемата на Бернули с вероятност за успех при един опит $p = P(A)$. Тогава*

$$p \approx \frac{m}{n}\cdot \tag{8.15}$$

Наистина, нека случайните величини $X_k$ са независими и са разпределени по закона на Бернули с параметър $p$. Имаме, че

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{при успешен } k\text{−ти опит;} \\ 0, & \text{при неуспешен } k\text{−ти опит} \end{cases} \tag{8.16}$$

и $m = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Затова

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{m}{n}\cdot$$

От друга страна, $EX_k = p, \quad k = 1, 2, \ldots, n$. Тогава от формула (8.13) с $a = p$ следва (8.15).

**Забележка 8.4.** *С формула* (8.15) *се обосновава формулата за статистическата вероятност.*

## 8.8 Централна гранична теорема

Видяхме при какви условия величината

$$s_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

има устойчив характер ($\approx EX_k$). Обаче не трябва да забравяме, че $s_n$ е случайна величина и има някакъв закон за разпределение. Оказва се, че при някои доста общи условия законът за разпределение на $s_n$ е доста близък до нормалния закон за разпределение. Теоремите, в които са указани тези условия, са обединени под названието **„централни гранични теореми"**.

Нека е дадена редицата от случайни величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ и разгледаме частната сума

$$v_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \,.$$

Тогава случайните величини

$$w_n = \frac{v_n - Ev_n}{\sqrt{Dv_n}}$$

са нормирани, т.е. имат $Ew_n = 0$ (центрирани са) и $Dw_n = 1$.

Нека $D_k = DX_k$ и $Q_k = E|X_k - EX_k|^3$. Ще казваме, че редицата $X_k$ удовлетворява условието на Ляпунов[2], ако

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} D_k\right)^{3/2}} = 0\,. \tag{8.17}$$

**Теорема 8.4 (Теорема на Ляпунов).** *Нека редицата от независими случайни величини $X_k$ удовлетворява условието на Ляпунов* (8.17). *Тогава*

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le w_n \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx\,. \tag{8.18}$$

Теоремата означава, че при големи $n$

$$P(a \le w_n \le b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx\,. \tag{8.19}$$

[2] Ляпунòв Александър Михайлович (1857–1918) – руски математик

В дясната част на (8.19) е вероятността за попадение в интервала $[a, b]$ в случая, когато случайната величина е нормално разпределена с параметри $0, 1$ ($EX = 0, \sigma_X = 1$), т.е. $w_n$ е разпределена приблизително както стандартно нормално разпределена случайна величина: $w_n \approx X_0 = N(0, 1)$. Тогава последователно получаваме

$$\frac{v_n - Ev_n}{\sqrt{Dv_n}} \approx X_0, \quad v_n \approx \sqrt{Dv_n} X_0 + Ev_n, \quad s_n \approx \frac{\sqrt{Dv_n}}{n} X_0 + \frac{Ev_n}{n} \cdot$$

Понеже линейна функция от нормално разпределена случайна величина също е нормално разпределена случайна величина, то като отчетем свойство Д) на нормалните разпределения, получаваме следното твърдение.

**Следствие 8.3.** *Нека редицата от независими случайни величини $X_k$ удовлетворява условието на Ляпунов* (8.17)*. Тогава*

$$s_n \approx Y = N(m, \sigma),$$

*където*

$$m = \frac{1}{n}(EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n),$$
$$\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n}\,.$$

*Освен това, ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са еднакво разпределени и*

$$EX_k = a, DX_k = s^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

*то $s_n \approx Y = N(m, \sigma)$, където $m = a$, $\sigma = \dfrac{s}{\sqrt{n}} \cdot$*

Когато случайните величини $X_k$ са независими и са разпределени по закона на Бернули с параметри $n, p$, като следствие на теоремата на Ляпунов се получава интегралната теорема на Моавър–Лаплас.

**Следствие 8.4.** *Нека са извършени $n$ независими опита по схемата на Бернули с вероятност за успех при един опит $p$ и нека $m_n$ е броят на успешните опити. Тогава*

$$P(\alpha \le m_n \le \beta) \approx \Phi\Big(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\Big). \tag{8.20}$$

От централната гранична теорема става ясно защо нормално разпределените случайни величини се срещат много често в практиката. Това е така, защото обикновено върху формирането на стойностите на дадена с.в. $X$ влияят голям брой независими, слабо действащи фактори. Тогава като резултат се получава случайна величина, която има разпределение, близко до нормалното. Такива са величините от следните примери:

- Измерване на физическа величина: Върху резултата от измерването $X$ влияят много случайни фактори като:
  - колебания на атмосферните условия;
  - вибрации на измерителния прибор;
  - умора на наблюдателя;
  - промени в прибора (захранване) и т.н.
  Всеки от тях внася много „малка” грешка $X_k$ в измерваната величина. Затова резултатът от измерването $X$, както и сумарната грешка $v_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ са подчинени на нормалния закон.

- Масово производство: Параметрите на изделието (размери на детайла) са случайни величини, разпределени по нормалния закон. Отклоненията от стандарта са породени от много причини със случаен характер, понеже производството е свързано с многобройни операции, които не могат да се изпълнят многократно с абсолютна точност (дори и от роботите!).
  Този факт се използва при определянето на разпределение на изделията по качествени групи и при оценката на количеството на нестандартните изделия (брак).

- Параметрите на хора (с една и съща възраст и пол) като тегло, ръст, гръдна обиколка, размери на ходилото и т.н. са разпределени по нормалния закон.
  Този факт се използва при планирането на производството на облекла (по ръст, обиколки на врата, гърдите, талията и ханша), обувки (по дължина и широчина на ходилото) и др.

## 8.9 Задачи

**8.1.** Пресметнете числата: $V_6^3, \widetilde{V}_2^{10}, P_5, C_8^7, C_{20}^{18}, \widetilde{C}_3^5, C_9^{2,3,4}$.

**8.2.** Постройте триъгълника на Паскал за $n = 11$.

**8.3.** Хвърлят се два зара – бял и червен. Представете изхода от опита като наредена двойка $(a, b)$, където $a$ са точките на белия зар, а $b$ – на червения зар. Колко са възможните наредени двойки $(a, b)$ ? За колко от тях сумата $a + b$: а ) е четна; б) се дели на 3; в) е четна или се дели на 3; г) е четна и се дели на 3?

**8.4.** Ръка за покер се състои от пет карти, раздадени от колода с 52 карти. Колко различни ръце за покер може да се раздадат, които съдържат:

а) две двойки (например $2A, 2Q$ и 7);

б) flush (пет карти от един цвят);

в) straight flush (пет поредни карти от даден цвят, но без $10, J, Q, K, A$);

г) royal flush ($10, J, Q, K, A$ от един цвят)?

**8.5.** В партида от 1000 детайла има 4 дефектни. За контрол са подбрани 100 детайла. Каква е вероятността сред тях да няма дефектни?

**8.6.** Птица каца на проводник, свързващ два стълба, разстоянието между които е 20 $m$ . Известно е, че всички точки от проводника са еднакво възможни за кацане на птицата. Каква е вероятността тя да кацне на разстояние не по-голямо от 5 $m$ от единия от стълбовете?

**8.7.** Шофьор пристига на кръстовище със светофар, който свети 25 $s$ червено, 5 $s$ жълто, 25 $s$ зелено, 5 $s$ жълто и т.н. Каква е вероятността на събитията:

а) шофьорът попада на „зелено";

б) шофьорът не попада на „зелено";

в) шофьорът трябва да чака „зелено" не повече от 10 $s$;

г) шофьорът трябва да чака „зелено" повече от 10 $s$?

**8.8.** На отсечка с дължина $a$ по случаен начин са избрани две точки, които я разделят на три части. Каква е вероятността, че от получените три отсечки може да се състави триъгълник?

**8.9.** Вероятността за раждане на момче е равна на $p = 0.515$. В семейството са решили, че деца ще се раждат до появата на второ момче. Каква е вероятността, че семейството ще бъде с четири деца?

**8.10.** Вероятността за раждане на момче е равна на $p = 0.515$. Каква е вероятността в семейство с четири деца да има: а) не по-малко от две момичета; б) поне едно момче; в) нито едно момче; г) три момчета.

**8.11.** От урна с 4 бели и 6 черни топки по случаен начин са извадени 3 топки. Каква е вероятността и трите топки да са бели, ако изваждането е направено: а) без връщане; б) с връщане.

**8.12.** В кутия има 20 топки за тенис, от които 12 са нови и 8 стари (с които вече е играно). По случаен начин от кутията изваждат две топки и след играта ги връщат обратно. На другия ден отново избират две топки, които се оказали нови. Каква е вероятността предния ден да са играли:

а) с две нови топки;

б) с две стари топки;

в) с една нова и една стара топка?

**8.13.** На склад е постъпила еднотипна продукция от три цеха: $I, II, III$. Обемите на доставките са в отношение съответно $1 : 2 : 7$. Известно е, че нестандартната продукция на цех $I$ е 3%, на цех $II$ – 2%, а на цех $III$ – 1%. Намерете вероятностите на събитията:

а) случайно избрано от склада изделие е нестандартно;

б) случайно избрано от склада изделие е произведено в цех $I$, ако то се е оказало нестандартно.

**8.14.** На изпит са 10 студенти, от които 3 са подготвени отлично (знаят всичките 20 въпроса от конспекта), 4 са подготвени добре (знаят по 16 въпроса), 2 – средно (знаят по 10 въпроса) и 1– слабо (знае 5 въпроса). Студент, които си взел изпита, отговорил на всичките три зададени въпроса. Каква е вероятността студентът да е бил подготвен: а) отлично; б) добре; в) средно; г) слабо?

**8.15.** Студент знае отговорите на 20 от всичките 25 въпроса на конспекта. На изпита са му зададени 3 въпроса. Намерете вероятностите на събитията:

а) Студентът е отговорил на трите въпроса;

б) Студентът е отговорил на два от въпросите;

в) Студентът е отговорил на един от въпросите;

г) Студентът е отговорил на поне един от въпросите;

д) Студентът не е отговорил на нито един от въпросите.

**8.16.** Трима стрелци стрелят подред по една и съща мишена. Всеки стрелец има по два патрона. При първото попадение стрелбата се прекратява. Вероятностите за улучване на целта от първия, втория и третия стрелец са съответно $0.2, 0.3$ и $0.4$. Каква е вероятността тримата стрелци да си изстрелят всичките патрони?